

COMPITINO N.2 DI ANALISI MATEMATICA III - 24/01/06

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

- a. Sia $\alpha = g(x, y, z) dx + z dy + (x + y) dz$ dove $g \in C^1(\mathbf{R}^3)$. Trovare g t.c. α sia esatta in \mathbf{R}^3 e $g(x, 0, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Trovare tutte le primitive della forma α con tale g .
- b. Sia Σ la parte del catenoide parametrizzata da

$$\Phi(\theta, t) = (\text{Ch}(t) \cos(\theta), \text{Ch}(t) \sin(\theta), t), \quad (\theta, t) \in D = [0, \pi] \times [0, 1],$$

dove $\text{Ch}(t) = (e^t + e^{-t})/2$. Mostrare che Σ è il sostegno di una *superficie regolare* e calcolare la sua area.

- c. Calcolare l'integrale $\int_{\Gamma} x e^z dx - y e^z dy + e^z dz$ dove $\Gamma = +\partial\Sigma$ dove Σ è il sostegno definito nella parte **b**, orientata da Φ . È richiesta anche la giustificazione della risposta; cioè la verifica delle ipotesi di eventuali teoremi usati.

Esercizio 2.

- a. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ il dominio definito da

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \text{Ch}^2(z), 0 \leq z \leq 1\}.$$

Mostrare che Ω è un *dominio regolare* e calcolare il suo volume.

- b. Siano Ω il dominio definito nella parte **a** e F il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2 y, y^2 z^2, xz)$. Calcolare il flusso di F uscente dal bordo di Ω , giustificando la risposta.
- c. Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ aperto e $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ un campo vettoriale con divergenza costante; cioè $\text{div } F \equiv c \in \mathbf{R}$ su Ω . Per ogni $P \in \Omega$, calcolare la derivata rispetto ad r del flusso di F uscente dal bordo della palla $B_r(P)$.

N.B. È concessa **UN'ORA e 45 MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.