

COMPITINO N.2 DI ANALISI MATEMATICA III - 18/02/05

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

- a. Dare le definizioni di *superficie regolare (parametrizzata)* e *area del sostegno di una superficie regolare*. Discutere **brevemente** la dipendenza del concetto d'area dalla parametrizzazione.
- b. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, \|(x, y)\| \leq 1\}$. Mostrare che Σ è il sostegno di una superficie regolare e calcolare la sua area.
- c. Siano $F \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ e $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una superficie regolare di classe $C^2(D, \mathbf{R}^3)$ t.c. $\text{rot } F = 3\nu$ su Σ dove ν è il campo normale definito da Φ . Calcolare il lavoro $\int_{\partial\tilde{\Sigma}^+} \langle F, T \rangle ds$ dove $\tilde{\Sigma} = \Phi(\tilde{D})$, $\tilde{D} \subset D^\circ$ è un dominio regolare, e $|\tilde{\Sigma}|_2 = A$.

Esercizio 2.

- a. Siano F il campo vettoriale $F(x, y, z) = (e^{y^2}, e^{x^2}, z - 4)$ e Σ il grafico

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = x^2 + y^2, \|(x, y)\| \leq 2\}.$$

Calcolare il flusso $\iint_{\Sigma} \langle F, \nu \rangle d\sigma$ dove ν è il campo normale su Σ con $\nu_3 = \langle \nu, e_3 \rangle < 0$.

- b. Siano $f, g \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare con $|\Omega|_3 = A$. Quanto vale

$$\iiint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy dz$$

se $\partial f / \partial x = 2$ su Ω , $g = 0$ su $\partial\Omega$, ed il valor medio di g su Ω vale B ?

- c. Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare e $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ il campo vettoriale di versori normali esterni. Calcolare il valor medio su $\partial\Omega$ della funzione

$$g = \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 + \lambda_3 \nu_3, \quad \lambda_j \in \mathbf{R}, \quad j = 1, 2, 3.$$

N.B. È concessa **UN'ORA e 45 MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.