

SECONDA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA III - 17/02/04

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

- a. Sia Σ il sostegno della superficie parametrizzata da

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad (u, v) \in D = [1, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi].$$

Verificare che Φ è una superficie *regolare* e calcolare l'area di Σ .

- b. Sia $F : A \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vettoriale. Dare le definizioni di *campo vettoriale conservativo* e *campo vettoriale irrotazionale* e discutere **brevemente** il legame fra questi due concetti.
- c. Sia F il campo vettoriale definito in \mathbf{R}^3 da $F(x, y, z) = (xz, yz, y^2)$. Questo campo è conservativo in qualche aperto di \mathbf{R}^3 ? Calcolare il lavoro effettuato da F lungo la curva $\gamma^+ = \partial^+ \Sigma$ dove Σ è la superficie definita nella parte **a** (con l'orientazione ν indotta dalla parametrizzazione Φ data).

Esercizio 2.

- a. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq e^{-z}, y \geq 0, 0 \leq z \leq h\}$ con $h > 0$. Verificare che Ω è misurabile secondo Peano-Jordan e calcolare il suo volume.
- b. Verificare che l'insieme Ω definito nella parte **a** è decomponibile in due domini normali e regolari rispetto l'asse z (e quindi ammissibile per il teorema della divergenza). Calcolare poi il flusso uscente dal bordo di Ω del campo $F(x, y, z) = (xe^{xy}, -ye^{xy}, z^2)$.
- c. Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ un insieme aperto e $u \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$ tali che per ogni palla $B_r(x_0) \subset \Omega$ il flusso del gradiente di u nullo; cioè

$$\iint_{\partial B_r(x_0)} \langle \nabla u, \nu \rangle d\sigma = 0$$

Mostrare che u soddisfa l'equazione di Laplace in Ω ; cioè per ogni $x_0 \in \Omega$

$$\Delta u(x_0) = (\operatorname{div} \nabla u)(x_0) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_0) = 0.$$

N.B. È concessa **UN'ORA E TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.