PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA III - 18/02/05

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema di Dini sulla funzione implicita per funzioni $\Phi : A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

b. Verificare che il sistema di equazioni

$$\Phi(x,y,z) = (\Phi_1(x,y,z), \Phi_2(x,y,z)) = (x^2 - yz + 2, xz - y^2 - 2) = (0,0)$$

può essere risolto in modo unico per una coppia di funzioni $(y,z) = (g(x), h(x))$ in un intorno di ogni sua soluzione (x_0, y_0, z_0). Nel caso $(x_0, y_0, z_0) = (2,2,3)$, trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine con resto di Peano per g, h centrato in $x_0 = 2$.

c. Sia $f(x,y,z) = xz$. Il punto $(x_0, y_0, z_0) = (2,2,3)$ può essere un candidato per un estremo locale di $f_{|\Phi^{-1}(0)}$ dove Φ è la funzione definita nella parte **a.**? Giustificare la risposta.

Esercizio 2. Siano $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ la curva parametrizzata da

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & t \in [0, \pi] \\ (t - \pi - 1, 0), & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

e ω la forma differenziale $\omega = xe^y\, dx + x^2 e^y\, dy$.

a. Verificare che φ è rettificabile e calcolare la lunghezza del suo sostegno.

b. Decidere se ω è esatta in $\mathbf{R}^2$.

c. Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$.

Esercizio 3.

a. Dare le definizioni di *superficie regolare (parametrizzata)* e *area del sostegno di una superficie regolare*. Discutere **brevemente** la dipendenza del concetto d'area dalla parametrizzazione.

b. Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ ||(x,y)|| \leq 1\}$. Mostrare che Σ è il sostegno di una superficie regolare e calcolare la sua area.

c. Siano $F \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ e $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una superficie regolare di classe $C^2(D, \mathbf{R}^3)$ t.c. $\mathrm{rot} F = 3\nu$ su Σ dove ν è il campo normale definito da Φ. Calcolare il lavoro $\int_{\partial \widetilde{\Sigma}^+} \langle F, T \rangle\, ds$ dove $\widetilde{\Sigma} = \Phi(\widetilde{D})$, $\widetilde{D} \subset D^\circ$ è un dominio regolare, e $|\widetilde{\Sigma}|_2 = A$.

Esercizio 4.

a. Siano F il campo vettoriale $F(x,y,z) = (e^{y^2}, e^{x^2}, z - 4)$ e Σ il grafico

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ ||(x,y)|| \leq 2\}.$$

Calcolare il flusso $\iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle\, d\sigma$ dove ν è il campo normale su Σ con $\nu_3 = \langle \nu, e_3 \rangle < 0$.

b. Siano $f, g \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare con $|\Omega|_3 = A$. Quanto vale

$$\iiint_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x}\, dxdydz$$

se $\partial f / \partial x = 2$ su Ω, $g = 0$ su $\partial \Omega$, ed il valor medio di g su Ω vale B?

c. Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare e $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ il campo vettoriale di versori normali esterni. Calcolare il valor medio su $\partial\Omega$ della funzione

$$g = \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 + \lambda_3 \nu_3, \quad \lambda_j \in \mathbf{R}, \ j = 1,2,3.$$

N.B. Sono concesse **TRE ORE e TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.