PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA III - 10/02/06

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema di Dini per sistemi.

b. Verificare che il sistema di equazioni

$$\Phi(x,y,z,w) = \big(x^2 + y^2 + z^2 + zwe^x - 2, xe^z + ye^w - z + w\big) = (0,0)$$

può essere risolto in modo unico per una coppia di funzioni $g, h = g(x,y), h(x,y)$ in un intorno del punto $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0,0,1,1)$. Trovare lo sviluppo di Taylor del primo ordine con resto di Peano per g, h centrato in $(x_0, y_0) = (0,0)$

c. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z) = (xz, 2xy, 3yz)$. Trovare i punti (x_0, y_0, z_0) per cui f sia un *diffeomorfismo locale*. Trovare il più grande aperto Ω che contenga il punto $(1,1,1)$ tale che $f_{|\Omega}$ sia un *diffeomorfismo globale*.

Esercizio 2. Sia γ la curva parametrizzata da

$$\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t), \quad t \in [0, \pi].$$

a. Mostrare che γ è *rettificabile* e calcolare la sua lunghezza.

b. Trovare la *parametrizzazione rispetto la lunghezza d'arco* di γ.

c. Calcolare il *lavoro effettuato* dal campo vettoriale $F(x,y,z) = (3x^2 \ln z, ze^y, z^{-1}x^3 + e^y)$ lungo γ con l'orientazione indotta da φ.

Esercizio 3. Sia Σ la parte del toro parametrizzata da

$$\Phi(t,\theta) = ((2+\cos t)\cos\theta, (2+\cos t)\sin\theta, \sin t)\,, \quad (t,\theta) \in [0,\pi] \times [0,\pi].$$

a. Mostrare che Σ è il sostegno di una *superficie regolare* e calcolare la sua area.

b. Trovare l'equazione del piano tangente $\Pi_{(\Phi(\pi/4,\pi/2))}\Sigma$.

c. Calcolare l'integrale $\int_\Gamma xy^2\,dx + e^z\,dy + ye^z\,dz$ dove $\Gamma = +\partial\Sigma$, orientata da Φ. È richiesta anche la giustificazione della risposta; cioè la verifica delle ipotesi di eventuali teoremi usati.

Esercizio 4.

a. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ il dominio definito da

$$\Omega = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z, 1 \le z \le 2\}.$$

Mostrare che Ω è un *dominio regolare* e calcolare il suo volume.

b. Siano Ω il dominio definito nella parte **a** e F il campo vettoriale $F(x,y,z) = (xe^z, ye^z, xz)$. Calcolare il flusso di F uscente dal bordo di Ω, giustificando la risposta.

c. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare con volume $|\Omega|_3 = V$. Assumiamo che esista $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ un campo vettoriale tale che $|\mathrm{div} F| \le c$ su Ω e, dove è definito, $F_{|\partial\Omega} = \nu$ il versore normale esterno. Stimare $|\partial\Omega|_2$, l'area di $\partial\Omega$.

N.B. Sono concesse **TRE ORE e TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.