

Funzioni Armoniche: Un Primo Assaggio

Kevin R. Payne

Appunti per il Corso Avanzato di Analisi Matematica III

CCD in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Università degli Studi di Milano

1 Introduzione.

In questi appunti vogliamo iniziare un discorso che può considerarsi anche un'introduzione alle Equazioni alle Derivate Parziali (EDP). Tali equazioni sono di importanza fondamentale per le scienze poiché danno un linguaggio per i modelli delle leggi fondamentali che governano un sistema di incognite che dipendono da più variabili. Inoltre l'EDP sono il linguaggio della geometria differenziale ed il punto centrale nell'uso dell'analisi in geometria. Molto importante sia per la fisica matematica che per la geometria è l'equazione di Laplace

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (1.1)$$

dove $u = u(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione regolare in un dominio $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ con $n \geq 1$. Quest'equazione ha come incognite la funzione u e si chiama soluzione dell'equazione di Laplace in Ω una funzione due volte derivabile per cui la relazione (1.1) sia soddisfatta per ogni $x \in \Omega$. Le soluzioni di quest'equazione alle derivate parziali formano una classe di funzioni con una tale ricchezza di belle proprietà che siamo obbligati a dar loro un nome.

Definizione 1.1 Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Si chiama $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω se u è soluzione dell'equazione (1.1) in Ω .

Si nota che la richiesta $u \in C^2(\Omega)$ è solo per comodità; basta assumere che esistano tutte le derivate parziali di secondo ordine per esempio. Infatti, si potrebbe dire che la definizione 1.1 è quella di una soluzione *classica* dell'EDP (1.1) e tale definizione potrebbe essere indebolita in modo sostanziale ma questo è un altro (importante) discorso. Prima di considerare qualche esempio e di parlare delle proprietà delle funzioni armoniche, presentiamo in modo più preciso qualche motivazione per studiare queste funzioni. Due testi belli sulle EDP sono: a livello base quello di Strauss [6] e più avanzato quello di Evans [2].

1.1 Modelli dalla Fisica Matematica

Pensiamo a $u = u(x)$ come la densità di qualche quantità in una regione Ω dello spazio; per esempio, possiamo pensare alla densità di *una temperatura, un potenziale elettrostatico, un potenziale di velocità, una concentrazione chimica*. Assumiamo che la densità sia in *equilibrio*; cioè, dopo aver trovato una sua distribuzione che è costante nel tempo (ma non necessariamente rispetto allo spazio fisico). In particolare, la nozione di equilibrio dipende dalla considerazione *del flusso dell'energia totale* associata in questo senso: per ogni sottodominio $A \subset \Omega$ dobbiamo avere un flusso netto di energia attraverso il bordo di A uguale a zero; cioè

$$0 = \text{Flusso}(u, \partial A) = \int_{\partial A} \langle F(x, u(x)), \nu \rangle d\sigma, \quad (1.2)$$

dove $F(x, u(x))$ è un campo vettoriale che rappresenta la densità di flusso attraverso ∂A . La forma particolare di F deve riflettere la natura fisica del problema in considerazione e rappresenta una fase di modellizzazione. In ogni caso, applicando il *teorema della divergenza* (assumendo che tutto sia abbastanza regolare) si trova

$$\int_A \text{div} F(x, u(x)) dx = 0 \quad \forall A \subset \Omega \quad (1.3)$$

dove per la arbitrarietà di A la funzione integranda deve annullarsi e, quindi, si trova l'equazione alle derivate parziali

$$\text{div} F(x, u(x)) = 0 \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Quest'equazione è di forma di divergenza e viene chiamata una legge di conservazione. Per studiarla si deve avere la forma particolare della F che rappresenta il modo nella quale la energia si “muove”. Un modello che funzione in molti casi è

$$F(x, u(x)) = -d\nabla u(x), \quad d > 0 \text{ costante}; \quad (1.5)$$

cioè, un flusso che è proporzionale al gradiente della densità u . La costante d viene chiamata una costante di diffusione e il segno in (1.5) è negativo per indicare che il flusso è diretto da una concentrazione alta ad una bassa. In particolare, questo modello è molto buono per *variazioni piccole* in u in *un ambiente omogeneo* ed è noto come la legge di Fick/Fourier/Ohm quando u rappresenta la *densità di concentrazione chimica/temperatura/potenziale elettrico* rispettivamente. In ogni caso, l'equazione (1.4) nel caso (1.5) diventa $d\Delta u = 0$, ovvero, le soluzioni sono funzioni armoniche.

1.2 Funzioni olomorfe nell'analisi complessa

Una funzione $f : \Omega \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ definita in un dominio del piano complesso a valori complessi si chiama olomorfa in Ω quando per ogni $z \in \Omega$ esiste la derivata complessa

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (1.6)$$

Il limite in (1.6) è preso rispetto alla topologia usuale sul piano complesso; cioè, tramite il modulo $|\cdot|$. In particolare, il limite deve esistere e deve essere indipendente dal modo in cui $h \rightarrow 0$ in \mathbf{C} . Scrivendo f in termini delle sua parte reale e parte immaginaria, cioè

$$f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1.7)$$

abbiamo f in termini di due funzioni reali $u = \operatorname{Re}f, v = \operatorname{Im}f$ di due variabili reali $x = \operatorname{Re}z, y = \operatorname{Im}z$. Vicino a z , se calcoliamo (1.6) lungo un incremento reale h (cioè $\operatorname{Im}h = 0$), si trova

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \right) + i \left(\frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad (1.8)$$

e, in modo analogo, calcolando lungo un incremento immaginario ih con $h \in \mathbf{R}$ troviamo

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + i(y + h)) - f(x + iy)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{v(x, y + h) - v(x, y)}{h} \right) - i \left(\frac{u(x, y + h) - u(x, y)}{h} \right) \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Quindi, dobbiamo avere il sistema di equazioni alle derivate parziali per u, v

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

le cosiddette equazioni di Cauchy-Riemann per la parte reale ed immaginaria di una funzione olomorfa. Se u, v sono di classe $C^2(\Omega)$ (e lo sono per forza anche se non è banale mostrarlo) si trova

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ovvero $\Delta u(x, y) = 0$ nel dominio Ω considerato come un dominio in \mathbf{R}^2 . In modo analogo, la parte immaginaria v soddisfa anche $\Delta v(x, y) = 0$ in Ω . Quindi, si può dire che *la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche*.

Le funzioni olomorfe sono gli oggetti di base nello studio dell'analisi complessa e godono di tantissime proprietà bellissime; per esempio sono tutte di classe C^∞ , sono esplicitabili localmente tramite serie di Taylor (sono le funzioni analitiche nel campo complesso), soddisfano la proprietà del valor medio, sono *mappe conformi* nel piano complesso, etc. Vedi per esempio i testi [4], [1], [5].

2 Costruendo funzioni armoniche

In questo paragrafo vogliamo dare qualche esempio concreto di funzioni armoniche e presentare qualche metodo per costruire altri esempi imponendo altre richieste del tipo geometrico/algebrico sulla funzione.

2.1 Primi esempi

Anche se è un po' disonesto, uno può considerare funzioni armoniche in una variabile sola; cioè $u \in C^2(a, b)$ tale che $u''(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Esempio 2.1 Una funzione u è armonica in un intervallo $(a, b) \subset \mathbf{R}$ se e solo se è una funzione affine; cioè $u(x) = \alpha x + \beta$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Cioè in dimensione 1, lo spazio di funzioni “armoniche” è finito dimensionale ed è uguale allo spazio delle funzioni affini. In dimensione superiore, il fatto che l'equazione è davvero un'EDP (e non è un'equazione differenziale ordinaria EDO) implica che lo spazio di soluzioni è infinito dimensionale. Comunque, l'esempio suggerisce che in dimensione superiore le funzioni affini saranno una sotto-classe delle funzioni armoniche.

Esempio 2.2 Per ogni $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ ed ogni $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione affine

$$u(x) = \langle \alpha, x \rangle + \beta = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \beta$$

è armonica su \mathbf{R}^n .

Questi esempi dicono che ogni polinomio di grado 1 è una funzione armonica e questo è un fatto utile nella costruzione di funzioni armoniche con proprietà desiderate. Per esempio, possiamo alzare o abbassare i valori di una funzione armonica u nella classe di funzioni armoniche prendendo $u + \beta$, oppure possiamo “aggiustare” il gradiente di u via $u + \langle \alpha, x \rangle$ nella classe di funzioni armoniche. D'altra parte, il fatto che tutte le funzioni affini siano armoniche dipende solo dal fatto che l'equazione di Laplace è una somma di derivate di ordine 2 uguale a zero. La struttura particolare dell'equazione si comincia già a vedere pensando ai polinomi di grado 2.

Esempio 2.3 Sia $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ una matrice con $a_{ij} \in \mathbf{R}$. La forma quadratica associata ad A

$$u(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

è armonica se e solo se A ha traccia nulla; cioè

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj} = 0.$$

A questo punto possiamo cominciare ad avere qualche idea che le funzioni armoniche devono essere molto particolari; in particolare, possiamo notare che per una funzione $u \in C^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto

$$\Delta u = \text{tr}[H_u(x)] \quad (2.1)$$

dove $H_u(x) = [\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j]_{n \times n}$ è la *Hessiana* di u , che è una matrice simmetrica (per il Teorema di Schwartz), che avrà n autovalori reali. Come conseguenza, si vede che ci potrebbe essere qualche ostruzione ad avere dei massimi e minimi locali forti. Sicuramente non è possibile avere H_u positiva o negativa definita. Infatti, è così. Non ci sono estremi locali forti nell'interno del dominio Ω e questo fatto viene chiamato il principio di massimo/ minimo forte per le funzioni armoniche. Torniamo a questo fatto nel paragrafo 3.

Infine, vale la pena dire che lo spazio della funzioni armoniche ha una struttura lineare che deriva dalla linearità dell'equazione.

Proposizione 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Allora lo spazio della funzioni armoniche in Ω*

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) : \Delta u = 0 \text{ in } \Omega\} \quad (2.2)$$

è uno spazio vettoriale (sottospazio di $C^2(\Omega)$).

Dim. Siano $u, v \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Allora la funzione $w = \alpha u + \beta v$ soddisfa

$$\Delta w = \alpha \Delta u + \beta \Delta v = 0 \text{ in } \Omega.$$

2.2 Invarianze nell'equazione di Laplace

Il punto qui è che per costruire altri esempi di funzioni armoniche partendo da soluzioni note, possiamo sfruttare il comportamento che l'operatore Δ ha rispetto a trasformazioni elementari dello spazio \mathbf{R}^n . Cioè, vogliamo trovare delle trasformazioni $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ che conservano lo spazio di soluzioni in questo senso: *sia u una qualsiasi soluzione di (1.1) in Ω , allora la funzione $v(x) = u(Tx)$ è una soluzione di (1.1) in $T^{-1}(\Omega) = \{x \in \mathbf{R}^n : Tx \in \Omega\}$. Una tale T sarà chiamata *invarianza* per l'equazione (1.1). In seguito considereremo qualche applicazione di queste invarianze.*

Proposizione 2.5: (Invarianza rispetto alle traslazioni) Siano $p \in \mathbf{R}^n$ e u armonica in Ω . Allora la funzione traslata

$$u_p(x) = u(x - p), \quad x \in \Omega + \{p\} \quad (2.3)$$

è armonica in $\Omega + \{p\} = \{x \in \mathbf{R}^n : x - p \in \Omega\}$.

Dim: Per prima cosa notiamo che la traslazione rispetto a p è una trasformazione $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ con la regola $\tilde{x} = Tx = x - p$ e l'insieme $\Omega + \{p\} = T^{-1}(\Omega)$. Infatti, $x \in T^{-1}(\Omega)$ se e solo se $Tx = x - p \in \Omega$. Per mostrare che $u_p(x)$ definita tramite (2.3) è armonica basta notare che

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [u(x - p)] = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x - p)$$

per la regola della catena e, quindi, $\Delta[u(x - p)] = (\Delta u)(x - p) = 0$, essendo $x - p \in \Omega$ per $x \in \Omega + \{p\}$.

Proposizione 2.6: (Invarianza rispetto alle dilatazioni) Sia $\lambda > 0$ e u armonica in Ω . Allora la funzione dilatata

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \quad x \in \lambda^{-1}\Omega \quad (2.4)$$

è armonica in $\lambda^{-1}\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : \lambda x \in \Omega\}$.

Dim: Per prima cosa notiamo che la dilatazione rispetto a λ è una trasformazione $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ con la regola $\tilde{x} = Tx = \lambda x$ e l'insieme $\lambda^{-1}\Omega = T^{-1}(\Omega)$. Infatti, $x \in T^{-1}(\Omega)$ se e solo se $Tx = \lambda x \in \Omega$. Per mostrare che $u_\lambda(x)$ definita tramite (2.4) è armonica basta notare che

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [u(\lambda x)] = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_j}(\lambda x)$$

per la regola della catena e quindi $\Delta[u(\lambda x)] = \lambda^2(\Delta u)(\lambda x) = 0$ essendo $\lambda x \in \Omega$ per $x \in \lambda^{-1}\Omega$.

Proposizione 2.7: (Invarianza rispetto alle trasformazioni ortogonali) Sia $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una trasformazione lineare con matrice $[T_{ij}]$ ortogonale (rispetto alla base canonica per \mathbf{R}^n); cioè $T^t T = I = T T^t$. Sia u armonica in Ω . Allora la funzione trasformata

$$u_T(x) = u(Tx) \quad x \in T^{-1}(\Omega) \quad (2.5)$$

è armonica in $T^{-1}(\Omega) = \{x \in \mathbf{R}^n : Tx \in \Omega\}$.

Dim: (caso $n = 2$) Il caso $n \geq 3$ è lasciato per esercizio. Abbiamo

$$Tx = \begin{bmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Tx)_1 \\ (Tx)_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

e, quindi, per la regola della catena

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[u_T(x)] = \frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx) \frac{\partial}{\partial x_1}[(Tx)_1] + \frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx) \frac{\partial}{\partial x_1}[(Tx)_2] = T_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx) + T_{21} \frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx)$$

ed, in modo analogo, si trova

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[u_T(x)] = T_{11}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(Tx) + [T_{11}T_{21} + T_{21}T_{11}] \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(Tx) + T_{21}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(Tx) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}[u_T(x)] = T_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx) + T_{21} \frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[u_T(x)] = T_{12}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(Tx) + [T_{12}T_{22} + T_{22}T_{12}] \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(Tx) + T_{22}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(Tx) \quad (2.9)$$

Quindi, combinando (2.7) – (2.9), e usando $I = T^t T$, ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 + T_{12}^2 & T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} \\ T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} & T_{21}^2 + T_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

si trova

$$\Delta[u_T(x)] = \Delta u(Tx) = 0 \quad \text{essendo } Tx \in \Omega \text{ e } u \in \mathcal{A}(\Omega).$$

2.3 Costruendo altre funzioni armoniche

Avendo in mano alcune invarianze T per l'equazione di Laplace, possiamo usarle per ridurre il numero di variabili nelle soluzioni via una riduzione per simmetria. L'idea è la seguente. Prendiamo qualche famiglia \mathcal{T} di invarianze $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ per Δ e cerchiamo delle soluzioni che siano invarianti rispetto alla famiglia \mathcal{T} . L'idea è più chiara facendo qualche esempio.

Esempio 2.8 Sia $u \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$ tale che u è invariante rispetto alle traslazioni in x ; cioè

$$u(x - x_0, y) = u(x, y) \quad x_0 \in \mathbf{R}, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (2.11)$$

allora $u(x, y) = f(y)$ per qualche funzione f di y e, quindi, per l'Esempio 2.1 abbiamo $u(x, y) = \alpha y + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Infatti, è chiaro che u deve dipendere solo da y e quindi $0 = \Delta u = f_{xx} + f_{yy} = f''(y)$ e, quindi, f è affine in y .

Adesso consideriamo funzioni armoniche che siano invarianti rispetto alle rotazioni in \mathbf{R}^n . Ogni rotazione è una trasformazione ortogonale e, quindi, per Proposizione 2.7, un'invarianza. Una funzione u invariante per le rotazioni sarà una funzione che dipende solo dalla distanza dall'origine; cioè $u(x) = f(\|x\|)$ dove $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione di una sola variabile. Tale funzioni vengono chiamate *funzioni radiali*. Essendo $\|x\|$ continua ma non differenziabile nell'origine possiamo immaginare che ci potrebbe essere qualche problema nell'origine. Vediamo. Se calcoliamo il laplaciano di $u(x) = f(\rho)$ dove abbiamo messo $\rho = \|x\|$ troviamo, via la regola della catena, per ogni $j = 1, \dots, n$

$$u_{x_j} = f'(\rho)\rho_{x_j}, \quad u_{x_j x_j} = f''(\rho)\rho_{x_j}^2 + f'(\rho)\rho_{x_j x_j},$$

dove abbiamo

$$\rho_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [x_1^2 + \dots + x_n^2]^{1/2} = \frac{1}{2} [x_1^2 + \dots + x_n^2]^{-1/2} 2x_j = \frac{x_j}{\rho},$$

e

$$\rho_{x_j x_j} = \frac{1}{\rho} - x_j \rho^{-2} \rho_{x_j} = \frac{1}{\rho} - \frac{x_j^2}{\rho^3}.$$

Quindi, abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta u &= f''(\rho) \left[\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\rho^2} \right] + f'(\rho) \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_j^2}{\rho^3} \right) \right] \\ &= f''(\rho) + \left[\frac{n-1}{\rho} \right] f'(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Quindi, le funzioni armoniche invarianti rispetto alle rotazioni sono determinate come soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria (2.12). Quest'equazione diventa un'equazione del primo ordine con variabili separabili con la sostituzione $g(\rho) = f'(\rho)$. Risolvendolo, si trovano esempi importanti di funzioni armoniche (non costanti) che sono alle fine singolari nell'origine. In particolare, abbiamo:

Esempio 2.9 *In dimensione $n = 2$ le funzioni armoniche (non costanti) con simmetria radiale*

sono armoniche in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ e sono tutte della forma

$$u(x) = u(x_1, x_2) = C_1 \ln(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + C_2, \quad C_i \in \mathbf{R}. \quad (2.13)$$

Esempio 2.10 In dimensione $n \geq 3$ le funzioni armoniche (non costanti) con simmetria radiale sono armoniche in $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ e sono tutte della forma

$$u(x) = C_1 \|x\|^{2-n} + C_2 \quad C_i \in \mathbf{R}. \quad (2.14)$$

Notiamo che, con una scelta opportuna delle costanti $C_2 = 0$ e C_1 , si possono definire le cosiddette *soluzioni fondamentali* dell'equazione di Laplace. Sono delle soluzioni *singolari* assai utili nello studio della costruzione di soluzioni, regolarità delle soluzioni, etc.

Infine, consideriamo delle funzioni armoniche **nel piano** che sono invarianti rispetto alle dilatazioni; cioè $u(\lambda x) = u(x)$ per ogni $\lambda > 0$. Introducendo le coordinate polari $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ nel piano, e, definendo la funzione $v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ con u armonica in $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, si può verificare che v deve soddisfare l'equazione

$$\Delta_{\text{pol}} v(\rho, \theta) = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 0, \quad (\rho, \theta) \in \Omega^*, \quad (2.15)$$

dove Ω^* è il dominio nel piano polare in corrispondenza con Ω . Ovviamente, dobbiamo fare attenzione all'origine dove $\rho = 0$. Adesso, se u è una funzione invariante per le dilatazioni, è chiaro che la funzione v associata dipende solo da θ ; cioè $v(\rho, \theta) = f(\theta)$. Così, abbiamo il seguente esempio, risolvendo l'equazione (2.15) per v nel caso in cui $v_{\rho} = v_{\rho\rho} = 0$.

Esempio 2.11 Le funzioni armoniche nel semi-piano $x > 0$ invarianti rispetto alle dilatazioni sono della forma

$$u(x, y) = C_1 \arctan(y/x) + C_2, \quad C_i \in \mathbf{R} \quad (2.16)$$

3 Proprietà qualitative delle funzioni armoniche

In questo paragrafo esaminiamo delle proprietà qualitative che sono soddisfatte da ogni funzione armonica. Queste proprietà forniscono informazioni sulle soluzioni dell'equazione di Laplace e rappresentano un'informazione preziosa da almeno due punti di vista. Uno è *a posteriori* nel senso

che possiamo confrontare una presunta soluzione con le proprietà che si sa che questa debba avere. L'altro è *a priori*, nel senso che possiamo cercare di usare queste informazioni (spesso nella forma di stime oppure formule di rappresentazione) per aiutarci o a mostrare l'esistenza di una soluzione con certe caratteristiche oppure di addirittura costruirla. Consideriamo adesso qualche proprietà insieme alle sue prime applicazioni.

3.1 Il principio di massimo

Abbiamo già notato al paragrafo 2.1 che una funzione armonica ha una certa avversione ad avere massimi/minimi locali. Come primo passo possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 3.1. (Principio di massimo/minimo debole) *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto e limitato. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica in Ω . Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \quad (3.1)$$

In particolare esistono $x_m, x_M \in \partial\Omega$ tali che

$$\min_{\overline{\Omega}} u = u(x_m) \leq u(x) \leq u(x_M) = \max_{\overline{\Omega}} u, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (3.2)$$

Dim: Facciamo solo il caso del massimo notando che il caso del minimo è analogo. In alternativa, si vede che, mettendo $v = -u$, il principio di minimo per u è il principio di massimo per v .

Passo 1: (Weierstrass) Abbiamo $u \in C^0(\overline{\Omega})$ con $\overline{\Omega}, \partial\Omega$ compatti, quindi, i massimi sono assunti e vale sicuramente la disuguaglianza

$$\max_{\overline{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u \quad (3.3)$$

Rimane solo da mostrare la disuguaglianza opposta per avere la prima formula in (3.1). Inoltre, in tal caso, esiste $x_M \in \partial\Omega$ per cui vale la seconda disuguaglianza in (3.2).

Passo 2: (Massimi globali per funzioni strettamente sub-armoniche) Consideriamo una funzione $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\Delta v(x) = \text{tr}(H_v(x)) > 0 \quad x \in \Omega \quad (3.4)$$

Tale v viene detta strettamente sub-armonica in Ω . Affermiamo che **non** esiste un massimo nell'interno per v . Per assurdo, supponiamo $x_M \in \Omega^\circ$ tale che $v(x_M) = \max_{\overline{\Omega}} v$. Questo massimo globale

nell'interno deve essere anche un massimo locale, e, quindi, abbiamo

$$\nabla v(x_M) = 0 \quad (3.5)$$

$$H_v(x_M) \leq 0 \quad (3.6)$$

che è assurdo.

Passo 3: (Perturbazione sub-armonica di u) Dato $\epsilon > 0$ arbitrario, consideriamo la perturbazione

$$v(x) = u(x) + \epsilon \|x\|^2 = u(x) + \epsilon \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 \right] \quad (3.7)$$

di u . Abbiamo $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e v strettamente sub-armonica

$$\Delta v = \Delta u + \epsilon[2n] = 2n\epsilon > 0.$$

Per il Passo 2, il massimo di v deve essere assunto solamente sul bordo di Ω , cioè

$$\exists x_0 \in \partial\Omega : v(x) \leq v(x_0) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} u(x) \leq v(x) \leq v(x_0) &= u(x_0) + \epsilon \|x_0\|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \\ &\leq \max_{\partial\Omega} u + \epsilon K, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \end{aligned}$$

perchè $x_0 \in \partial\Omega$ ed esiste K perchè $\overline{\Omega}$ è limitato. Infine ϵ è arbitrario e, quindi,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$$

e la dimostrazione è completa.

Notiamo che la formula (3.2) consiste in una stima a priori sui valori delle soluzioni di $\Delta u = 0$ in termine dei valori sul bordo. Questi valori al bordo determinano le soluzioni in modo unico.

Corollario 3.2. (Determinazione unica di una funzione armonica) *Siano Ω un aperto limitato e $g \in C^0(\partial\Omega)$ una funzione data. Se esiste una funzione armonica $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che $u|_{\partial\Omega} = g$ allora u è unica.*

Dim: Per assurdo, supponiamo che ci siano due funzioni armoniche u, v uguali a g al bordo. Allora la funzione $w = u - v$ è una funzione armonica che si annulla sul bordo. Quindi, per il principio di massimo/minimo, abbiamo

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = 0 \quad \text{e} \quad \min_{\overline{\Omega}} w = \min_{\partial\Omega} w = 0.$$

Cioè $w \equiv 0$ ovvero $u \equiv v$.

Questo problema di determinare una funzione armonica con valori prescelti sul bordo, cioè, data $g \in C^0(\partial\Omega)$, trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad (3.8)$$

è un esempio di un *problema al contorno* per l'equazione di Laplace, il cosiddetto *Problema di Dirichlet*.

3.2 La proprietà del valor medio

Forse la proprietà più bella e più improbabile (a prima vista) delle funzioni armoniche è il fatto che il loro valore in ogni punto fissato è la media dei loro valori sulle palle (e sulle sfere) intorno quel punto fissato.

Teorema 3.3. *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto e connesso. Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω . Per ogni palla $B_R(x) \subset \Omega$ si ha*

$$u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|_n} \int_{B_R(x)} u(y) dy \quad (3.9)$$

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|_{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_{n-1}(y) \quad (3.10)$$

dove σ_{n-1} è l'elemento di misura $n - 1$ dimensionale sulla sfera $S_R(x) = \partial B_R(x)$.

Facciamo qualche commento prima di cominciare la “dimostrazione”. Per prima cosa si può mostrare che le formule (3.9) e (3.10) sono equivalenti sfruttando la seguente formula di *co-area* (cf. [3] formule (108.41) e (108.45))

$$\int_{B_R(0)} f(x) dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B_t(0)} f d\sigma_{n-1} \right) dt \quad (3.11)$$

che è una formula di “riduzione per bucce” . Ovviamente abbiamo discusso solo i casi di σ_{n-1} per $n = 2, 3$ ma un discorso sul caso di dimensione superiore si può trovare in [3], capitolo 12 ed in particolare paragrafo 108.

Dim: (formula 3.10 per n = 3) Possiamo assumere $0 \in \Omega$, sfruttando l’invarianza per traslazione, e, quindi, dobbiamo mostrare solo che

$$u(0) = \frac{1}{|\partial B_R(0)|_2} \int_{\partial B_R(0)} u d\sigma \quad (3.12)$$

Consideriamo tutte le medie sulle sfere di raggio $r \in (0, R)$; cioè, definiamo la funzione

$$\psi(r) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|_2} \int_{\partial B_r(0)} u d\sigma \quad (3.13)$$

Affermiamo che $\psi'(r) = 0$ per ogni r , e, quindi, $\psi(r)$ è costante. Facendo tendere $r \rightarrow 0^+$, troviamo $u(0)$, perchè u è continua e facendo $r \rightarrow R^-$, troviamo il membro destro di (3.12). Quindi, rimane solo da verificare la affermazione. In coordinate sferiche abbiamo

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(\Phi(r; \theta, \varphi)) \sin \varphi d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove $\Phi(r; \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$ è la parametrizzazione della sfera di raggio r . Calcolando la derivata rispetto a r possiamo derivare sotto il segno dell’integrale trovando

$$\psi'(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle \nabla u(\Phi(r; \theta, \varphi)), \Phi_r(r; \theta, \varphi) \rangle \sin \varphi d\theta d\varphi. \quad (3.15)$$

Il vettore

$$\Phi_r(r; \theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

è un vettore normale esterno ν_e sulla sfera, perchè, se pensata in funzione di r con (θ, φ) fissati, la funzione $\Phi(r; \theta, \varphi)$ traccia un segmento radiale che è ortogonale ad ogni sfera. Inoltre, si verifica che questo vettore è un versore. Quindi, abbiamo

$$\begin{aligned}
\psi'(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle \nabla u(\Phi(r; \theta, \varphi)), \nu_e \rangle \sin \varphi \, d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle \nabla u(\Phi(r; \theta, \varphi)), \nu_e \rangle r^2 \sin \varphi \, d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{|\partial B_r(0)|_2} \int_{\partial B_r(0)} \langle \nabla u, \nu_e \rangle \, d\sigma \\
&= |\partial B_r(0)|_2 \int_{B_r(0)} \operatorname{div}(\nabla u) \, dx = 0,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dove abbiamo usato il Teorema della divergenza e u armonica in $B_r(0)$. La dimostrazione è completa.

Concludiamo questo paragrafo mostrando che la proprietà del valor medio implica la versione forte del principio di massimo.

Teorema 3.4: (Principio di massimo/minimo forte) *Sia Ω aperto, limitato, e connesso. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ armonica in Ω . Se esiste massimo o minimo globale nell'interno di Ω , allora u è costante.*

Cioè, in questo contesto i massimi, minimi esistono ma solo al bordo, tranne nel caso banale di una funzione costante.

Dim: Di nuovo facciamo solo il caso del massimo (vedi il commento all'inizio della dimostrazione del Teorema 3.1). Inoltre, pensiamo alla dimensione $n = 3$, anche se l'argomento è identico per ogni dimensione; dipende solo dal Teorema 3.3.

Assumiamo che esista $x_M \in \Omega^\circ$ t.c. $u(x_M) = \max_{\bar{\Omega}} u$. Vogliamo mostrare che u è costante. Scegliamo r_M t.c. $\bar{B}_{r_M}(x_M) \subset \Omega$. Essendo u armonica in $B_{r_M}(x_M)$, abbiamo per ogni $r \in (0, r_M]$

$$u(x_M) = \frac{1}{|\partial B_r(x_M)|} \int_{\partial B_r(x_M)} u \, d\sigma = \bar{u}_{|\partial B_r(x_M)} \leq \max_{\partial B_r(x_M)} u \leq u(x_M). \tag{3.17}$$

Quindi, tutte le disuguaglianze in (3.17) sono uguaglianze e abbiamo la media di u su ogni sfera di

raggio $r \leq r_M$ uguale al massimo globale M su $\bar{\Omega}$. Di conseguenza, abbiamo $u \equiv M$ su $\bar{B}_{r_M}(x_M)$. Essendo Ω limitato e connesso per archi troviamo $u \equiv M$ in Ω ma $u \in C^0(\bar{\Omega})$, e, quindi, u è costante ed uguale a M ovunque.

Concludiamo con un'osservazione. Abbiamo detto che a prima vista la proprietà del valor medio sembra improbabile, ma, se pensiamo all'applicazione del problema di temperatura u in equilibrio, stiamo dicendo che lo stato preferito è una distribuzione molto uniforme, dove il valore in un punto è la media dei valori dei vicini. Qui, è importante non avere fonti di energia termica dentro il dominio per cui vale l'equazione di Laplace e non quello di Poisson con un termine di sorgente $\Delta u = f$ (vedi Esercizio 4.7).

3.3 Il Teorema di Liouville

Qui vogliamo indicare una proprietà delle funzioni armoniche sul tutto lo spazio \mathbf{R}^n . Devono essere o illimitate oppure costanti. La dimostrazione è fatta usando la proprietà del valor medio sulle palle, più una *stima a priori* sul gradiente di u . Di nuovo, ci limitiamo ad una dimostrazione completa solo nel caso di dimensione $n = 3$.

Lemma 3.5: *Sia $u \in C^3(\bar{B}_r(x_0))$ armonica in $B_r(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ e $u \geq 0$. Allora*

$$|D_{x_j} u(x_0)| \leq \frac{n}{r} u(x_0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Dim: Essendo $u \in C^3$, ogni derivata parziale $v = D_{x_j}$ è essa stessa una funzione armonica. Quindi, possiamo applicare la formula (3.9) del valor medio sulla palla per trovare

$$D_{x_j} u(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} D_{x_j} u(x) dx = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) \nu_j d\sigma, \quad (3.19)$$

dove ν_j è il componente j -esimo della normale esterna, ed abbiamo usato il Teorema della divergenza. Adesso, usando $u \geq 0$ sul bordo e $|\nu_j| \leq 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} |D_{x_j} u(x_0)| &\leq \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma \\ &= \frac{|\partial B_r(x_0)|}{|B_r(x_0)|} u(x_0) = \frac{n}{r} u(x_0), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula (3.10) del valor medio.

Notiamo che l'ipotesi di regolarità $u \in C^3$ è solamente tecnica; in particolare, si può mostrare che ogni funzione armonica è necessariamente di classe C^∞ . In ogni caso, il nostro risultato è il seguente.

Teorema 3.6. (di Liouville) *Sia $u \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ una funzione armonica su tutto lo spazio. Se u è limitata allora u è costante.*

Dim: Assumiamo u limitata e armonica su \mathbf{R}^n . Possiamo assumere $u \geq 0$ altrimenti possiamo trattare $v = u - m$, dove $m = \inf u$. Assumiamo anche $u \in C^3(\mathbf{R}^n)$. Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ fisso, il Lemma 3.5 implica

$$|\nabla u(x_0)|^2 = \sum_{j=1}^n [D_{x_j} u(x_0)]^2 \leq \frac{n^2}{r^2} u(x_0) \quad \forall r > 0$$

e, quindi, mandando $r \rightarrow +\infty$ si trova $|\nabla u(x_0)| = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ connesso. Quindi, u è costante e la dimostrazione è completa.

Infine, osserviamo che c'è tutta una storia ancora da raccontare. In particolare, il Lemma 3.5 apre tutto un discorso sul problema di ottenere stime a priori sulle soluzioni. Altre proprietà qualitative seguono, ma ci fermiamo qui per il momento.

4 Esercizi

Esercizio 4.1. Verificare le affermazioni fatte negli Esempi 2.1, 2.2, 2.3.

Esercizio 4.2. Mostrare la Proposizione 2.7 nel caso generale di dimensione n . Suggerimento: la formula

$$\delta_{ij} = [T^t T]_{ij} = \sum_{k=1}^n [T^t]_{ik} T_{kj} = \sum_{k=1}^n [T]_{ki} T_{kj}$$

potrebbe essere utile.

Esercizio 4.3. Risolvere l'equazione differenziale (2.12) e, così, completare le affermazioni degli Esempi 2.9, 2.10.

Esercizio 4.4. Verificare la formula (2.15) per il laplaciano in coordinate polari e completare la affermazione dell'Esempio 2.11

Esercizio 4.5. Verificare che il principio di minimo per u equivale il principio di massimo per $v = -u$. Quale equazione è soddisfata da v ? Che cos'è la relazione fra $\max(-u)$ e $\min(u)$?

Esercizio 4.6. È possibile trovare una funzione armonica sul disco $B_2(0) \subset \mathbf{R}^2$ t.c.

$$u(\bar{x}) = 10, \quad \bar{x} \in B_2(0) \quad \text{e} \quad u = x_1^2 \quad \text{sul bordo?}$$

È possibile con $u(\bar{x}) = 4$?

Esercizio 4.7. Mostrare il seguente teorema di unicità per il problema di Dirichet per l'equazione di Poisson. Siano Ω aperto e limitato, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ funzioni date. Se esiste $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad (4.1)$$

allora u è unica.

Esercizio 4.8. Nel caso di dimensione $n = 3$ mostrare che le formule di valor medio (3.9) e (3.10) sono equivalenti fra loro quando $u \in C^0(\bar{\Omega})$. Suggerimento: usare la formula di riduzione (3.11).

Esercizio 4.9. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ armonica in $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ aperto e limitato con bordo ammissibile per il Teorema della divergenza. Mostrare che il flusso del gradiente attraverso il bordo è nullo, cioè

$$0 = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu_e \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma,$$

dove ν è il versore normale esterno al bordo e la quantità $\partial u / \partial \nu$ viene chiamata derivata normale al bordo.

Esercizio 4.10. Sia Ω aperto, limitato, con bordo ammissibile per il Teorema della divergenza. Mostrare la seguente condizione di compatibilità per il problema di Neumann per l'equazione di Poisson: Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Allora il termine noto f ha media nulla su Ω . Che cosa succede nel caso $\partial u/\partial \nu = g$ sul bordo?

Esercizio 4.11 Mostrare le identità di Green: Siano $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ammissibile per il Teorema della divergenza. Allora

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle \, dx \quad (4.3)$$

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \, d\sigma \quad (4.4)$$

Cosa dice la formula (4.4) nel caso in cui u è armonico in Ω e abbiamo $v(x) = G^y(x)$ t.c. $v|_{\partial \Omega} = 0$ e $\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = u(y)$ con $y \in \Omega$? Questa è la base del metodo delle funzioni di Green per rappresentare le soluzioni dell'equazione di Laplace/Poisson.

Esercizio 4.12 La funzione

$$u(x) = \frac{\sin(\|x\|^2)}{1 + \|x\|^2} \arctan(x_1 + x_2 + x_3)$$

è armonica su \mathbf{R}^3 ?

References

- [1] L. Ahlfors - *Complex Analysis, 3rd Edition*, McGraw-Hill, New York, 1976.
- [2] L. C. Evans - *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **Vol. 19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [3] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone - *Analisi Matematica Due*, Liguori Editore, Napoli, 1996.
- [4] G. Gillardi - *Analisi III*, McGraw-Hill Italia, Milano, 1994.
- [5] W. Rudin - *Analisi Reale e Complessa*, Editore Boringhieri, Torino, 1974.
- [6] W. A. Strauss - *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley & Sons, New York, 1992.