PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA III - 28/01/05

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema di Dini delle funzioni implicite per funzioni $\Phi : A \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

b. Sia $\Gamma = \Phi^{-1}(0)$ l'insieme di livello dove $\Phi(x,y,z) = y^3x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Verificare che Γ definisca localmente una superficie regolare.

c. Trovare gli estremi locali di $f_{|\Gamma}$ dove Γ è il vincolo definito nella parte **b** e $f(x,y,z) = y^3x^2 + z^2$. **FACOLTATIVO:** Ci sono estremi globali per $f_{|\Gamma}$?

Esercizio 2.

a. Dare la definizione di *curva rettificabile* in $\mathbf{R}^3$ e discutere **brevemente** la dipendenza della lunghezza sulla parametrizzazione di una curva rettificabile.

b. Sia $\varphi(t) = (9t^2, t, 4t^{3/2}), t \in [0,2]$. Trovare la lunghezza del suo sostegno γ e calcolare il valor medio di $f(x,y,z) = e^y + xz$ su γ.

c. Trovare la parametrizzazione rispetto la lunghezza d'arco per la curva definita nella parte **b**.

Esercizio 3. Sia $\alpha = g(x,y,z)\,dx + (2xy+z)\,dy + (y+2z)\,dz$ dove $g \in C^1(\mathbf{R}^3)$.

a. Trovare g t.c. α è <u>*esatta*</u> in $\mathbf{R}^3$ e $g(x,0,z) = 0$ per ogni $(x,z) \in \mathbf{R}^2$. Giustificare la risposta con le definizioni rilevanti ed gli enunciati dei risultati usati.

b. Sia g la funzione determinata nella parte **a**. Trovare tutte le primitive della forma α con questa g e calcolare $\int_\gamma \alpha$ dove γ è parametrizzata da $\varphi(t) = (t, t^2, 3-t), \quad t \in [0,2]$.

c. Sia invece $g = y^2 + 2y$. Calcolare l'integrale della forma α lungo γ una curva piana, regolare, semplice che racchiude un dominio regolare D nel piano $z = 0$ di area $|D|_2 = 10$ con l'orientazione positiva su γ.

Esercizio 4.

a. Siano F il campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2 - 3z + 2)$ e Ω il dominio

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \le z^2, \quad 1 \le z \le 2\}.$$

Verificare che F e Ω siano ammissibili per il Teorema della Divergenza nello spazio.

b. Verificare la tesi di tale teorema calcolando entrambi i membri della formula.

c. Siano $\Omega = \bar{B}_1(0)$ e $g \in C^1(\Omega)$ t.c. i suoi valor medi soddisfino $\bar{g}_{|\Omega} = A$ e $\bar{g}_{|\partial\Omega} = B$. Calcolare

$$\iiint_\Omega (xg_x + yg_y + zg_z)\,dxdydz.$$

Suggerimento: Potrebbe essere utile considerare $(xg)_x$, etc.

N.B. Sono concesse **TRE ORE e TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.