PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA III - 02/05/06

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Il canditato risolva **TRE** esercizi a sua scelta. Sono concesse **DUE ORE e TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.

Esercizio 1. Sia $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $\Phi(x,y,z) = xy^2z^3 - 108$ e poniamo $\Gamma = \Phi^{-1}(0)$.

a. Mostrare che, vicino ad ogni $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, l'equazione $\Phi = 0$ definisce implicitamete un funzione $z = g(x,y)$. Trovare lo sviluppo di Taylor di secondo ordine con resto di Peano per tale g nel caso $(x_0, y_0, z_0) = (3, 6, 1)$. La funzione g è convessa in un intorno di $(3, 6)$?

b. Trovare gli estremi locali di $f_{|\Gamma}$ con $y > 0$ dove $f = (x + y + z)/3$ è la media aritmetica delle coordinate.

Esercizio 2. Sia γ la curva parametrizzata da

$$\varphi(t) = (\cos t, |\sin t|, t), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

a. Mostrare che γ è *rettificabile* e calcolare la sua lunghezza.

b. Calcolare l'integrale di linea $\int_\gamma \omega$ dove la forma differenziale è definita da

$$\omega = 2x\cos(z)\,dx + \frac{1}{1+y}\,dy - x^2\sin(z)\,dz.$$

Esercizio 3. Sia Σ la superficie con parametrizzazione

$$\Phi(u,v) = (R(u)\cos(u), R(u)\sin(u), v), \quad 0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le h(u)$$

dove $h, R \in C^1([0,\pi])$ sono non-negative e stettamente crescenti.

a. Mostrare che Σ è il sostegno di una *superficie regolare* e trovare un'espressione integrale per la sua area.

b. Nel caso concreto di $R(u) = h(u) = u$, trovare l'equazione del piano tangente nel punto $\Phi(\pi/2, \pi/2)$ e calcolare l'area di Σ.

Esercizio 4.

a. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ il dominio definito da

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le z \le e^{2-(x^2+y^2)}, \quad x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Mostrare che Ω è un *dominio regolare* e calcolare il suo volume. Calcolare il flusso uscente dal bordo per il campo vettoriale $F(x,y,z) = (yz, xz, x^2z + y^2z)$.

b. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare per cui il bordo è anche localmente il grafico di una funzione di classe C^1. Mostrare che se Ω è *stellato* rispetto l'origine, allora $\langle x, \nu \rangle \ge 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, dove ν è il versore esterno sul bordo.