Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 31/01/02

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Teorema: (di Dini) *Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dove A è aperto. Supponiamo*

$$\textbf{i)} \quad \Phi, \Phi_y \in C^0(A)$$

$$\textbf{ii)} \quad \text{esiste } (x_0, y_0) \in A \text{ tale che } \Phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono intorni $B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^2, B_\rho(y_0) \subset \mathbf{R}$ in cui esiste un'unica funzione $g : B_\delta(x_0) \to B_\rho(y_0)$ tale che $y_0 = g(x_0)$ e $\Phi(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$. Inoltre $g \in C^0(B_\delta(x_0))$.

Se inoltre $\Phi \in C^1(A)$ si ha $g \in C^1(B_\delta(x_0))$ e vale

$$g_{x_i}(x) = -\Phi_{x_i}(x, g(x))/\Phi_y(x, g(x)), \quad x \in B_\delta(x_0)$$

Se inoltre $\Phi \in C^k(A), k \geq 2$ si ha $g \in C^k(B_\delta(x_0))$.

1b. Per espicitare $\Phi(x, y, z)$ come funzione $z = g(x, y)$ controlliamo l'ipotesi del Teorema di Dini in questo caso: $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ e quindi è regolare quanto vogliamo. In ogni punto $p = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ (dove $x_0 y_0 z_0^2 = 4$) si calcola $\Phi_z(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 y_0 z_0$, quindi $\Phi_z(p) \neq 0$. Per il Teorema di Dini esiste un'unica funzione implicita $g : B_\delta(x_0, y_0) \to B_\rho(z_0)$ tale che $z_0 = g(x_0, y_0)$ e $\Phi(x, y, g(x, y)) = 0$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$.

Per trovare il piano tangente $T_p\Gamma$ si ricorda $\nabla\Phi(p) \neq 0$ implica che il piano tangente è

$$T_p\Gamma : \quad \langle \nabla\Phi(p), (x, y, z) - p \rangle = 0.$$

Nel nostro caso $\nabla\Phi(x, y, z) = (yz^2, xz^2, 2xyz)$ da cui segue $\nabla\Phi(1, 1, 2) = (4, 4, 4)$ e poi

$$T_p\Gamma : x + y + z - 4 = 0.$$

Si nota che questo equivale

$$z = 2 - (x - 1) - (y - 1) = g(1, 1) + g_x(1, 1)(x - 1) + g_y(1, 1)(y - 1)$$

con $g_x(1, 1) = -1, g_y(1, 1) = -1$.

Per la convessità ci serve la matrice Hessiana $H_g(1,1)$. Per trovare i valori delle derivate partiziali di g in $(1,1)$ si calcola le derivate parziale in modo implicito; derivando l'equazione

$$0 = \Phi(x, y, g(x, y)) = xyg^2 - 4, \quad (x, y) \in B_\delta(1, 1).$$

Calcolando le derivate ∂_x, ∂_y si trova

$$yg^2 + 2xygg_x = 0 \tag{1}$$

$$xg^2 + 2xygg_y = 0 \tag{2}$$

e poi derivando (1) rispetto ad x e y e poi derivando (2) rispetto ad y dà:

$$4ygg_x + 2xyg_x^2 + 2xygg_{xx} = 0 \tag{3}$$

$$g^2 + 2ygg_y + 2xgg_x + 2xyg_yg_x + 2xygg_{xy} = 0 \tag{4}$$

$$4xgg_y + 2xyg_y^2 + 2xygg_{yy} = 0 \tag{5}$$

Valutando (1) e (2) in $x = 1, y = 1, g = 2$ si ritrova i valori delle derivate di primo ordine; usando anche questi valori l'equazioni $(3), (4), (5)$ forniscono

$$g_{xx} = 3/2 \quad g_{xy} = g_{yx} = 1/2 \quad g_{yy} = 3/2$$

dove si nota $g \in C^\infty \subset C^2$ implica l'uguaglianza delle derivate miste. Si controlla che

$$J_g(1,1) = \det H_g(1,1) = 2 > 0$$

e che la traccia è $3 > 0$ quindi la matrice Hessiana è definita positiva con autovalori $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Quindi g è convessa nel punto $(1,1)$.

1c. Si ricorda che un vincolo $\Gamma = \Phi^{-1}(0)$ si dice *regolare* se e solo se Φ è di classe C^1 nel suo dominio e vale $\nabla\Phi \neq 0$ su Γ. Nel nostro caso $\nabla\Phi = 0$ equivale il sistema

$$yz^2 = 0, xz^2 = 0, 2xyz = 0$$

Però quest'ultima è impossibile (come abbiamo visto sopra) e quindi $\nabla\phi \neq 0$ su $\mathbf{R}^3$ e quindi su Γ.

Essendo $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ e Γ localmente C^∞ si ha $f_{|\Gamma} \in C^1(\Gamma)$ e che gli estremi locali di $f_{|\Gamma}$ si trovano nei punti critici vincolati (cioè sono gli unici candidati). Per il Teorema dei molteplicatori di Lagrange, basta trovare i punti critici liberi della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\Phi(x, y, z) = x^2 = y^2 + z^2 - \lambda\left(xyz^2 - 4\right).$$

Cioè dobbiamo risolvere il sistema

$$0 = \mathcal{L}_x = 2x - \lambda yz^2 \tag{6}$$

$$0 = \mathcal{L}_y = 2y - \lambda x z^2 \tag{7}$$

$$0 = \mathcal{L}_z = 2z - \lambda 2xyz \tag{8}$$

$$0 = \mathcal{L}_\lambda = -xyz^2 + 4 \tag{9}$$

dove ricordiamo $x, y, z \neq 0$ dovuto all'equazione (9) che implica anche $\lambda \neq 0$. Da (8) segue $1 = \lambda xy$. Molteplicando (6) per $y \neq 0$ e (7) per $x \neq 0$ mostra $\lambda y^2 = \lambda x^2$ ma e quindi $y = \pm x$. Usando di nuovo (9) si vede $y \neq -x$ e quindi

$$x = y.$$

Usando quest'ultima relazione e $\lambda \neq 0$ il sistema sopra diventa equivalente a

$$x^2 = 4/z^2, x^2 = 1/\lambda, 2 = \lambda z^2.$$

Risolvendolo si trova i punti critici vincolati

$$(\pm\sqrt[4]{2}, \pm\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{8}) \quad \text{e} \quad (\pm\sqrt[4]{2}, \pm\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{8}$$

che sono gli unici candidati per i luoghi degli estremanti locali.

Esercizio 2.

2a. Una curva continua γ con parametrizzazione $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ si chiama *rettificabile* se esiste finito

$$L(\phi) = \sup_{\mathcal{P}} \{ l(\phi_{\mathcal{P}}) : \ \phi_{\mathcal{P}} \text{ poligonale inscritta in } \phi \}$$

dove per una partizione $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ di $[a, b]$ si definisce

$$l(\phi_{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^{N} ||\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})||.$$

In tal caso si chiama $L(\gamma) = L(\phi)$ la *lunghezza della curva parametrica* ϕ.

La curva parametrica $\phi(t) = (t, 2t, -t^2), t \in [1, 2]$ è una curva di classe $C^1[1, 2]$ e quindi rettificabile dove si calcola la lunghezza via

$$L(\phi) = \int_1^2 ||\phi'(t)|| \, dt.$$

Si trova $||\phi'(t)|| = \sqrt{5 + 4t^2}$ e quindi

$$L(\gamma) = L(\phi) = \int_1^2 \sqrt{5 + 4t^2} \, dt = \sqrt{21} - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{21} + 4}{5} \right)$$

Il calcolo di quest'integrale è un po' lungo dove si nota la presenza della "bestia" $\int \sqrt{a^2+b^2t^2}\,dt$. I passi principali sono: **1)** riscrivere $a^2 + b^2t^2 = a^2(1 + (bt/a)^2$ dove $a = \sqrt{5}$ e $b = 2$ e usare la sostituzione $bt/a = \tan\theta$, **2)** si trova un integrale della forma

$$\frac{a^2}{b}\int \sec^3\theta\, d\theta$$

dove $\sec\theta = 1/\cos\theta$, **3)** si usa integrazione per parti per trovare

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\tan\theta\sec\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right] + C$$

e poi **4)** si torna al variable originale t.

2b. Ricordiamo

Def: *Siano Ω un aperto in R^3 e F un campo vettoriale in Ω.*

a.) *Si chiama F conservativo in Ω $\Leftrightarrow$ $F \in C^0(\Omega, \mathbf{R}^3)$ e esiste $\phi \in C^1(\Omega)$ tale che $F = \nabla\phi$ in Ω*

b.) *Si chiama F irrotazionale in Ω $\Leftrightarrow$ $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ e valgono l'equazioni*

$$\frac{\partial F_i}{\partial_{x_j}} - \frac{\partial F_j}{\partial_{x_i}} = 0 \text{ in } \Omega \text{ per } i \neq j;$$

cioè se rot $F = 0$ *in Ω dove $F = (F_1, F_2, F_3)$.*

Abbiamo mostrato:

1) F conservativo in Ω e $F \in C^1(\Omega) \Rightarrow \phi \in C^2(\Omega)$ e F irrotazionale in Ω

2) F irrotazionale in Ω (stellato, semplicamente connesso) $\Rightarrow$ F conservativo in Ω

3) F conservativo in $\Omega \Rightarrow$ il lavoro effettuato da F lungo una curva regolare dipende solo dagli estremi ed il verso.

2c. Il campo dato $F \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ dove R è stellato rispetto l'origine. Quindi F è conservativo eqivale F irrotazionale. Si calcola il rotore trovando

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy^2 & yx^2 & z^3/3 \end{vmatrix} = (0, 0, 2xy - 2xy) = 0.$$

Quindi esiste una funzione potenziale ϕ per F in tutto $\mathbf{R}^3$. Per trovarlo possiamo calcolare un certo integrale di linea oppure possiamo risolvere il sistema

$$\phi_x = F_1 = xy^2, \phi_y = F_2 = yx^2, \phi_z = F_3 = z^3/3.$$

Si trova

$$\phi(z, y, z) = x^2y^2/2 + \phi_1(y, z) = x^2y^2/2 + \phi_2(x, z) = z^4/12 + \phi_3(x, y)$$

per funzioni opportune $\phi_k, k = 1,2,3$. Una scelta è $\phi(x,y,z) = x^2y^2/2 + z^4/12$, oppure questa funzione più una costante.

Per calcolare il lavoro, sfruttiamo questa potenziale trovando

$$\int_\gamma \langle F,T\rangle\, ds = \int_\gamma \langle \nabla\phi, T\rangle\, ds = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \frac{205}{4}$$

dove $P_1 = (1,2,-1)$ e $P_2 = (2,4,-4)$ sono gli estremi del sostegno di γ.

Esercizio 3.

3a.

Def: *Si chiama superficie regolare un'applicazione* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *tale che*

(SR1) *D è un dominio (la chiusura di un aperto) connesso e $\Phi \in C^1(D)$.*

(SR2) *Φ è iniettiva su D° (l'interno di D).*

(SR3) *La matrice Jacobiana $D\Phi(u,v)$ ha rango 2 per ogni $(u,v) \in D^\circ$.*

Def: *Sia $\omega = F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + F_3\, dx_3$ una forma differenziale lineare con coefficienti $F_i \in C^0(\mathbf{R}^3)$ per $i = 1,2,3$. Si chiama ω esatta in $\mathbf{R}^3$ se esiste $f \in C^1(\mathbf{R}^3)$ tale che $F = \nabla f$ in $\mathbf{R}^3$. Si chiama ω chiusa in R^3 se $F_i \in C^1(\mathbf{R}^3)$ e valgono l'equazioni*

$$\frac{\partial F_i}{\partial_{x_j}} - \frac{\partial F_j}{\partial_{x_i}} = 0 \quad \text{in } R^3 \quad \text{per} \quad i \neq j;$$

cioè se rot $F = 0$ *in* $\mathbf{R}^3$ *dove* $F = (F_1, F_2, F_3)$.

3b. Il dominio D è ovviamente la chiusura di un aperto ed è connesso. $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ e quindi vale $(SR1)$. Per la iniettività $(SR2)$ si nota che $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2)$ implica subito che $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$; infatti, Φ è iniettiva su tutto $\mathbf{R}^2$. La matrice Jacobiana è

$$D\phi(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2u & 2v \end{bmatrix}$$

e ha rango 2 per ogni (u,v) avendo due righe linearmente indipendente e quindi vale anche $(SR3)$. **N.B.** È anche chiaro che Φ è una superficie regolare con bordo ed è stokiana.

Ricordiamo che l'area di una superficie regolare è definita da

$$\text{area}(\Phi) = \int\int_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv$$

dove $\Phi_u = (0,1,2u)$ e $\Phi_v = (-1,0,2v)$ da cui segue

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2u \\ -1 & 0 & 2v \end{vmatrix} = (2v, -2u, 1)$$

Quindi $||\Phi_u \wedge \Phi_v|| = \sqrt{4v^2 + 4u^2 + 1}$. Passando ai coordinati polari si trova

$$\text{area}(\Phi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4\rho^2}\rho \, d\rho d\theta = 2\pi \frac{2}{3}\frac{1}{8}(1+4\rho^2)^{3/2}|_0^1$$

Quindi l'area vale $\pi(5^{3/2} - 1)/6$.

3c. Si vede facilmente che ω non è chiusa in R^3 essendo

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xe^z & z & xy \end{vmatrix} = (x-1, xe^z - y, 0)$$

e quindi ω non è neanche esatta in R^3 perchè tutte le forme esatte (con coefficienti C^1) sono chiuse.

Per calcolare l'integrale di linea si può procedere direttamente oppure si può applicare il teorema di Stokes dove abbiamo notato che Φ è stokiana. Inoltre il campo F è $C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ e quindi C^1 in un intorno del sostegno Σ di Φ. Questo sostegno Σ è la superficie laterale di un paraboloide ovvero il grafico $z = x^2 + y^2$ per $x^2 + y^2 \leq 1$. Il suo bordo $\gamma = \partial\Sigma$ è un cerchio $x^2 + y^2 = 1$ che sta a quota $z = 1$ che viene fornita con l'orientazione antiorario rispetto il piano xy. Questa curva è anche il bordo della superficie $\widetilde{\Sigma}$ formato dal disco chiuso a quota $z = 1$. Quindi si trova

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\widetilde{\Sigma}} \langle \text{ rot } F, n \rangle \, d\sigma$$

dove $n = (1,0,0)$ dà l'orientazione su $\widetilde{\Sigma}$ compatibile con il verso di γ^+. Essendo n ortogonale al rotore di F su $\widetilde{\Sigma}$ l'integale vale zero.

Esercizio 4.

4a. La regione Ω data non è limitato e quindi cerchiamo di definire il suo volume in senso generalizzato. Si pone $|\Omega| = \lim_{T\to+\infty} |\Omega_T|$ se questo limite esiste finito dove

$$\Omega_T = \{(x,y,z) \in \Omega : z \leq T\}$$

Questo dominio troncato Ω_T è misurabile secondo Peano-Jordan (è un dominio regolare) e quindi si sa

$$|\Omega_T| = \int_{\Omega_T} dxdydz.$$

Per calcolare questo volume usiamo i stratti in z; cioè

$$\int_{\Omega_T} dxdydz = \int_0^T \left(\int\int_{D_z(h)} dxdy \right) dh$$

dove $D_z(h) = \{(x, y, z) \in \Omega_T : z = h\}$. L'integrale doppio un $D_z(h)$ dà l'area di un disco $D_z(h)$ di raggio $(1 + h)^{-2/3}$ e quindi abbiamo

$$\int_{\Omega_T} dxdydz = \int_0^T \pi(1 + h)^{-4/3}\, dh = 3\pi \left(1 - (1 + T)^{-1/3}\right).$$

Prendendo il limite per $T \to +\infty$ si trova $|\Omega| = 3\pi$. **N.B.** Si può anche calcolare il volume di Ω_T tramite le coordinate cilindriche.

4b. Dato il fatto che Ω ha volume finito ha senso definire il valor medio

$$\bar{f}_{|\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f\, dxdydz$$

dove si interpreta nuovamente l'integrale in senso improprio. Calcolando in modo analogo

$$\int_{\Omega} f\, dxdydz = \lim_{T\to+\infty} \int\int\int_{\Omega T} f\, dxdydz = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \left(\int\int_{D_z(h)} f\, dxdy \right) dh$$

dove la funzione f è costante e vale $(1 + h)^{1/4}$ sullo strato $D_z(h)$. Quindi il limite da calolare è

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \left(\int\int_{D_z(h)} \pi(1 + h)^{-13/12} \right) dh = \lim_{T\to+\infty} 12\pi \left(1 - (1 + T)^{-1/12}\right) = 12\pi.$$

Quindi il valor medio vale 4.

4c. Siamo tentati ad applicare direttamente una versione del teorema della divergenza ad Ω illimitato; cioè

$$\int\int_{\partial\Omega} \langle F, n\rangle\, d\sigma = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div} F\, dxdydz = \int\int\int_{\Omega} f\, dxdydz = 12\pi.$$

Per giustificarlo dobbiamo fare un processo al limite simile e quello fatto sopra. Applicando il teorema della divergenza al dominio Ω_T e usando $\operatorname{div} F = f$ si ha

$$\int\int_{\partial\Omega_T} \langle F, n\rangle \, d\sigma = \int\int\int_{\Omega_T} f \, dxdydz.$$

Il membro destro sopra tende a 12π per $T \to +\infty$. Il membro sinistro può essere spezzato in due integrali di superficie così

$$\int\int_{\partial\Omega\cap\{(x,y,z):z\leq T\}} \langle F, n\rangle \, d\sigma + \int\int_{\Sigma_T} \langle F, n\rangle \, d\sigma$$

dove il primo tende al flusso di F attraverso il bordo di Ω in senso generalizzato e il secondo deve essere mandato a zero. Non è così facile farlo in generale, ma per $F = (0, 0, 5(1+z)^{5/4}/4)$ per esempio (che ha divergenza uguale ad f) si trova

$$\langle F, n\rangle = \frac{5}{4}(1+T)^{5/4} \quad \text{su} \quad \Sigma_T$$

e quindi l'integrale su Σ_T vale $5\pi(1+T)^{-4/3+5/4}/4$ che tende a zero.

Esercizio 5. (corso avanzato)

5a. Essendo $u \in C^2(B_2(0)) \cap C^0(\overline{B_2(0)})$ una funzione armonica in $\Omega = B_2(0)$ possiamo applicare il principio di massimo per concludere

$$\max_{B_2(0)} / \min_{B_2(0)} u = \max_{\partial B_2(0)} / \min_{\partial B_2(0)} u.$$

Qui il bordo $\partial B_2(0)$ è un cerchio di raggio 2 che puo essere parametrizzato tramite $(x, y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Essendo $u = g$ sul bordo si ha

$$u_{|\partial B_2(0)}(\theta) = 2\cos\theta + 4\sin^2\theta \leq 6 < 7.$$

Quindi la risposta è no.

5b. Usando la proprietà del valor medio per le funzioni armoniche sappiamo

$$u(0,0) = \overline{u}_{|\partial B_2(0)} = \frac{1}{|\partial B_2(0)|}\int_{\partial B_2(0)} u \, ds.$$

Si sa $|\partial B_2(0)| = 4\pi$ e sfruttando la parametrizzazione sopra si calcola

$$\int_{\partial B_2(0)} u \, ds = 2\int_0^{2\pi} \left(2\cos\theta + 4\sin^2\theta\right) \, d\theta = 8\pi$$

Quindi $u(0,0) = 2$.