Soluzione della Prova Intermedia di Analisi Matematica III - 19/11/04

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Per l'enunciato del Teorema di Dini vedi **Teorema 4.1** degli appunti in rete. Per la definzione di vincolo regolare vedi **Definizione 7.4** degli appunti.

Se $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ definisce un vincolo regolare, con $\Phi \in C^1(A, \mathbf{R})$ e $A \subset \mathbf{R}^3$ aperto, allora per ogni $x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \Gamma_0$ abbiamo $\nabla\Phi(x_0) \neq 0$ e quindi almeno uno delle derivate parziali $\partial_{x_i}\Phi(x_0) \neq 0$. Quindi applicando il Teorema di Dini rispetto quella variabile x_i si trova che localmente Γ_0 è grafico di una funzione di classe C^1. Per esempio, se $\partial_{x_3}\Phi(x_0) \neq 0$ esiste un intorno aperto $\mathcal{U} = B_\delta(x_1^0, x_2^0) \times B_\sigma(x_3^0) \subseteq A$ nella quale esiste un'unica $g \in C^1(B_\delta(x_1^0, x_2^0)$ t.c.

$$\mathcal{U} \cap \Gamma_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3 = g(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in B_\delta(x_1^0, x_2^0)\}$$

Inoltre, esiste un piano tangente al Γ_0 esplicitabile tramite g.

1b. Abbiamo $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ con $\Phi(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xyz + 1$. Vogliamo controllare che Γ_0 è un vincolo regolare. Si ha:

1. $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ e quindi è $C^1(A, \mathbf{R}^3)$.
2. Γ_0 non è vuoto - per esempio, $(0, -1, z) \in \Gamma_0$ per ogni $z \in \mathbf{R}$.
3. $\nabla\Phi \neq 0$ su Γ_0

Infatti

$$\nabla\Phi(x, y, z) = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, -3xy) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

ma su Γ_0, $(x, y) \neq (0, 0)$. Quindi Γ_0 è regolare.

1c. Abbiamo $f = z - 3$ è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ (e quindi è di classe C^1) e il vincolo Γ_0 è regolare. Quindi per il teorema di molteplicatori di Lagrange, i solo candidati ad essere estremi locali di $f_{|\Gamma_0}$ sono i punti critici liberi $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\Phi(x, y, z) = z - 3 - \lambda\left(x^3 + y^3 - 3xyz + 1\right);$$

cioè dobbiamo risolvere il sistema

$$0 = \mathcal{L}_x = -\lambda(3x^2 - 3yz) = -3\lambda(x^2 - yz) \tag{1}$$

$$0 = \mathcal{L}_y = -\lambda(3y^2 - 3xz) = -3\lambda(y^2 - xz) \tag{2}$$

$$0 = \mathcal{L}_z = 1 + \lambda(3xy) \tag{3}$$

$$0 = \mathcal{L}_\lambda = -(x^3 + y^3 - 3xyz + 1) \tag{4}$$

Da (3) si vede $x, y, \lambda \neq 0$ e quindi da (1) e (2) si ha $z = x^2/y = y^2/x$ da cui segue $x = y = z$. La (4) diventa allora $-x^3 + 1 = 0$ e quindi

$$x = y = z = 1, \quad \lambda = -1/3;$$

cioè, l'unico punto critico vincolato è $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = (1, 1, 1, -1/3)$.

La natura locale di questo punto critico vincolato può essere studiato mediante la matrice Hessiana $H_{f-\lambda_0\Phi}(x_0, y_0, z_0)$ sullo spazio tangente al vincolo $T_{(x_0,y_0,z_0)}\Gamma_0$. Si ricorda che $v \in \mathbf{R}^3$ è una direzione tangente al vincolo regolare $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ nel punto $P_0 = (1, 1, 1)$ se e solo se

$$0 = \langle v, \nabla\Phi(1, 1, 1)\rangle = \langle v, (0, 0, -3)\rangle.$$

Risolvendo per $v = (v_1, v_2, v_3)$ si trova

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolando la matrice Hessiana si trova

$$M = H_{f+3^{-1}\Phi}(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi la forma quadratica $H_{f+3^{-1}\Phi}(1, 1, 1)$ su $T_{(1,1,1)}\Gamma_0$ è

$$v^T M v = 2v_1^2 - 2v_1v_2 + 2v_2^2 = 2\left[(v_1 - v_2/2)^2 + 3v_2^2/4\right] > 0 \quad \text{per} \quad v \neq 0$$

Quindi abbiamo un minimo locale forte in $(1, 1, 1)$ per $f_{|\Gamma_0}$.

Per decidere se questo minimo locale è minimo globale dobbiamo sapere se $f(1, 1, 1) = -2$ è il minimo globale di $f(x, y, z) = z - 3$ su Γ_0; cioè è possibile avere $z < 1$ su Γ_0? La risposta è sì come abbiamo già visto sopra; per esempio, $(0, -1, z)$ risolve $x^3 + y^3 - 3xyz + 1 = 0$ per ogni $z \in \mathbf{R}$. **N.B.** Ci sono modo più sistematici per rispondere alla domanda; per esempio, di analizzare il comportamento lungo rette o altre sezioni.

Esercizio 2.

2a. Per le definizioni di *curva rettificabile, lunghezza di una curva* si può vedere **Definizione 9.3** degli appunti. Abbiamo introdotto una relazione di equivalenza che descrive la dipendenza di questi concetti sulla parametrizzazione. In particolare **Definizione 10.2** degli appunti è

Definizione: *Due curve parametrizzate $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ e $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbf{R}^n$ sono equivalenti nel senso C^0 se esiste un omeomorfismo $g : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ (g è biettiva con g, g^{-1} continue) t.c. $\varphi(t) = (\psi \circ g)(t), \quad t \in [a,b]$. Se inoltre g è un diffeomorfismo di classe C^1 si dice φ, ψ sono equivalenti in senso C^1.*

Poi abbiamo enunciato il seguente **Proposizione 10.3**:

10.3. Proposizione: *Siano φ, ψ due curve continue. Se $\varphi \overset{C^0}{\sim} \psi$ allora $L(\varphi) = L(\psi)$. In particolare, sono entrambi rettificabili se una lo è e la lunghezza è indipendente dall'orientazione.*

2b. La curva parametrizzata

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t, t) & t \in [0, 2\pi] \\ (1, 0, 4\pi - t) & t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

è continua su $[0, 4\pi]$ ed è di classe C^1 a tratti; cioè $\varphi_{|\,[0,2\pi]}$ e $\varphi_{|\,[2\pi,4\pi]}$ sono di classe C^1 (sono di classe C^∞). Quindi, per il **Teorema 9.10**, la curva è rettificabile e la sua lunghezza data dall'integrale

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} ||\varphi'(t)||\, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} ||\varphi'(t)||\, dt.$$

Calcolando il vettore di velocità per φ troviamo

$$||\varphi'(t)||^2 = \begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2 & t \in [0, 2\pi] \\ 1 & t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

Quindi abbiamo

$$L = L(\varphi) = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi.$$

Per trovare la parametrizzazione rispetto la lunghezza d'arco ricordiamo che ci serve $\gamma(s) : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ dove $\gamma(s) = \varphi(t(s))$ con $t = t(s)$ la funzione inversa della lunghezza d'arco $s = s(t) : [0, 4\pi] \to [0, L]$. Per una curva C^1 a tratti si ha

$$s = s(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t ||\varphi'(\tau)||\, d\tau & t \in [0, 2\pi] \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} ||\varphi'(\tau)||\, d\tau + \int_{2\pi}^t ||\varphi'(\tau)||\, d\tau & t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

da cui

$$s = s(t) = \begin{cases} \sqrt{2}t & t \in [0, 2\pi] \\ 2\sqrt{2}\pi + t - 2\pi & t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

e quindi

$$t = t(s) = \begin{cases} s/\sqrt{2} & s \in [0, 2\sqrt{2}\pi] \\ s + 2\pi - 2\sqrt{2}\pi & s \in [2\sqrt{2}\pi, 2\pi\sqrt{2} + 2\pi] \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\gamma(s) = \varphi(t(s)) = \begin{cases} (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2}) & s \in [0, 2\sqrt{2}\pi] \\ (1, 0, 2\pi + 2\sqrt{2}\pi - s) & s \in [2\sqrt{2}\pi, 2\pi\sqrt{2} + 2\pi] \end{cases}$$

2c. Sia $F \in C^0(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ e γ la curva della parte **2b.**. Vogliamo sapere se F conservativo implica che il lavoro $\int_\gamma \langle F, T \rangle \, ds$ è nullo. Per una curva regolare a tratti, abbiamo detto che la risposta è sì (vedi **Teorema 11.13**). Per curve regolari a tratti lo stesso argomento funziona. In particolare:

1. F conservativo $\Rightarrow\ \exists U \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ t.c. $\nabla U = F$ in $\mathbf{R}^3$

2. L'integrale sulla curva semplice chiusa γ si spezza in due curve regolari $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ usando le restrizioni di φ a $[0, 2\pi]$ e $[2\pi, 4\pi]$ che vanno da $P_0 = \varphi(0) = (1, 0, 0)$ a $P_1 = \varphi(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$ lungo un'elica e poi torna da P_1 a P_0 lungo un segmento. Si ha

$$\int_\gamma \langle F, T \rangle \, ds = \int_{\gamma_1} \langle F, T \rangle \, ds + \int_{\gamma_2} \langle F, T \rangle \, ds$$

ma usando la funzione potenziale U sui pezzi regolari si trova

$$\int_\gamma \langle F, T \rangle \, ds = [U(P_1) - U(P_0)] + [U(P_0) - U(P_1)] = 0.$$

2d. Vogliamo calcolare il lavoro effettuato da $F(x, y, z) = (y, -x, -yz)$ lungo la curva della parte **2b.**. Ricordiamo per una curva $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^3$ di classe C^1 a tratti rispetto $\{t_0 = 0 < t_1 = 2\pi < t_2 = 4\pi\}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle F, T \rangle, ds \quad &:= \quad \int_0^{2\pi} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt \\ &= \quad \int_0^{2\pi} (-1 - t \sin t) \ dt \\ &= \quad -2\pi + [t \cos t] \,|_0^{2\pi} - \sin t|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Quindi il lavoro è zero ed il campo <u>potrebbe</u> essere conservativo (il lavoro effettuato lungo una curva semplice chiusa è sempre nullo - per la parte **2c.**). D'altre parte, è anche possibile che F non sia conservativo. Infatti, non lo è. Ma questo non è stato chiesto. In particolare, $\text{rot}F = (-z, 0, -2) \neq (0, 0, 0)$ e il campo non è irrotazionale.