Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 18/02/05

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Teorema: (di Dini) *Sia* $\Phi : A \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *dove* A *è aperto. Denotiamo con* $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ *un elemento generico di* A*. Supponiamo*

$$\mathbf{i)} \quad \Phi, D_y\Phi \in C^0(A)$$

$$\mathbf{ii)} \quad \text{esiste } (x_0, y_0) \in A \text{ tale che } \Phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad D_y\Phi(x_0, y_0) \;\; \text{e}' \text{ invertibile}$$

Allora esistono intorni $B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}, B_\rho(y_0) \subset \mathbf{R}^2$ *in cui esiste un'unica funzione* $g = (g_1, g_2) : B_\delta(x_0) \to B_\rho(y_0)$ *tale che* $y_0 = g(x_0)$ *e* $\Phi(x, g(x)) = 0$ *per ogni* $x \in B_\delta(x_0)$*. Inoltre* $g \in C^0(B_\delta(x_0), \mathbf{R}^2)$*.*

Se inoltre $\Phi \in C^1(A)$ *si ha* $g \in C^1(B_\delta(x_0), \mathbf{R}^2)$ *e vale*

$$g'(x) = -[D_y\Phi(x, g(x))]^{-1} D_x\Phi(x, g(x)), \quad x \in B_\delta(x_0)$$

Se inoltre $\Phi \in C^k(A), k \geq 2$ *si ha* $g \in C^k(B_\delta(x_0))$*.*

1b. Per verificare che il sistema $\Phi(x, y, z) = (x^2 - yz + 2, xz - y^2 - 2) = (0, 0)$ può essere risolto localmente vicino (x_0, y_0, z_0) per un'unica coppia di funzioni $(y, z) = (g(x), h(x))$ controlliamo l'ipotesi del Teorema di Dini in questo caso: $\Phi \in C^\infty(A)$ dove $A = \mathbf{R} \times (0, +\infty) \times \mathbf{R}$ e quindi è regolare quanto vogliamo per $y_0 > 0$. Per ogni $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ per cui $\Phi(P_0) = 0$ rimane solo a verificare l'invertibilità della matrice $D_{(y,z)}\Phi(P_0)$. Si calcola trovando

$$D_{(y,z)}\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} -z & -y \\ -2y & x \end{bmatrix}$$

e quindi $\det[D_{(y,z)}(P_0)] = -x_0 z_0 - 2y_0^2 = 0$ se e solo se

$$x_0 z_0 = -2y_0^2$$

ma su $\Phi^{-1}(0)$ abbiamo dalla equazione per Φ_2 che $x_0 z_0 = y_0^2 + 2 \neq -2y_0^2$ per nessun y_0 e quindi e la matrice è invertibile. Per il Teorema di Dini la coppia di funzioni implicite $(y, z) = (g(x), h(x))$ esistono in un intorno di $x = 0$, sono uniche, e sono C^∞.

Notiamo che $\Phi(2,2,3) = 0$ e quindi con $P_0 = (2,2,3)$ siamo vicino ad una soluzione. Per trovare lo sviluppo di Taylor per g e h in questo caso, partiamo dal sistema vicino $x_0 = 2$

$$x^2 - g(x)h(x) + 2 = 0 \tag{1}$$

$$xh(x) - g^2(x) - 2 = 0 \tag{2}$$

dove le equazioni (1) e (2) sono soddisfate per ogni x vicino a 2. Derivando in modo implicito arriviamo alle equazioni

$$2x - gh' - g'h = 0 = h + xh' - 2gg'. \tag{3}$$

Valutando (3) nel punto $(x, g, h) = (2, 2, 3)$ e risolvendo per (g', h') si trova $g'(2) = 1$ e $h'(2) = 1/2$. Derivando (3) di nuovo dà

$$2 - 2g'h' - gh'' - g''h = 0 = xh'' + 2h' - 2(g')^2 - 2gg'' \tag{4}$$

e valutando (4) in $(x, g, h; g', h') = (2, 2, 3; 1, 1/2)$ si trova $g''(2) = 0$ e $h''(2) = 1/2$. Quindi si ha

$$y = g(x) = 2 + (x-2) + o(|x-2|^2) \quad x \to 2$$

$$z = h(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + o(|x-2|^2) \quad x \to 2$$

1c. Per decidere se $P_0 = (2,2,3)$ è un candidato per un estremo locale per $f_{|\Phi^{-1}(0)}$ cerchiamo di applicare il teorema sui molteplicatori di Lagrange. Ci serve: 1) $f(x,y,z) = xz$ di classe C^1, 2) $\Gamma_0 = \Phi{-}1(0)$ definisce un *sistema di vincoli regolari.*

Abbiamo la 1) perchè $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$. Per mostrare la 2) dobbiamo verificare: 2a) $\Phi^{-1}(0) \neq \emptyset$; 2b) $\Phi \in C^1(A; \mathbf{R}^2)$ con A aperto, e 2c) la matrice jacobiana $D\Phi$ ha caratteristica 2 (rango massimo) sul vincolo $\Phi^{-1}(0)$. Qui $(2,2,3) \in \Phi^{-1}(0)$ e $\Phi \in C^\infty(A, \mathbf{R}^2)$ con $A = \mathbf{R}^3$ e quindi si ha 2a) e 2b). Inoltre, si trova

$$D\Phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & -z & -y \\ z & -2y & x \end{bmatrix}$$

che ha caratteristica due su Γ_0 perchè la seconda e la terza colonna sono linearmente independente su Γ_0 per il conto fatto nella parte **b**.

Quindi, per il Teorema dei molteplicatori di Lagrange, possiamo affermare che i candidati per gli estremi vincolati sono i punti critici della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1\Phi_1(x,y,z) - \lambda_2\Phi_2(x,y,z).$$

Il sistema per i punti critici è

$$0 = \mathcal{L}_x = z - 2x\lambda_1 - z\lambda_2 \tag{5}$$

$$0 = \mathcal{L}_y = -z\lambda_1 - 2y\lambda_2 \tag{6}$$

$$0 = \mathcal{L}_z = x + y\lambda_1 - x\lambda_2 \tag{7}$$

$$0 = \mathcal{L}_{\lambda_1} = -(x^2 - yz + 2) \tag{8}$$

$$0 = \mathcal{L}_{\lambda_2} = -(xz - y^2 - 2) \tag{9}$$

Adesso $(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 3)$ è un candidato per un estremo vincolato solo se esistono λ_1, λ_2 per qui $(2, 2, 3; \lambda_1, \lambda_2)$ risolve il sistema $(5) - (9)$. Le equazioni (8) e (9) sono soddisfate, ma il sistema $(5) - (7)$ non ammette nessuna soluzione (λ_1, λ_2) con $(x, y, z) = (2, 2, 3)$. Quindi la risposta è NO.

N.B. Si potrebbe anche sfruttare la parte **b**; cioè troviamo lo sviluppo di Taylor di $\varphi(x) := f_{|\Gamma_0}(x) = xh(x)$ vicino a $x = 2$. Si mostra che $\varphi'(2) \neq 0$ e quindi non c'è estremo locale in $(x, y, z) = (2, 2, 3)$.

Esercizio 2.

2a. Vogliamo stabilire che la curva con parametrizzazione $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t) & t \in [0, \pi] \\ ((t - \pi - 1, 0) & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

è rettificabile e poi calcolare la sua lunghezza. Abbiamo φ è continua ed è C^1 a tratti e quindi rettificabile e vale

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \int_0^\pi ||\varphi'(t)||\, dt + \int_\pi^{2\pi} ||\varphi'(t)||\, dt \\ &= \int_0^\pi 1\, dt + \int_\pi^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \end{aligned}$$

2b. Ricordiamo: sia una forma differenziale ω di classe C^1 esatta, allora ω è anche chiusa. Nel nostro esempio $\omega = xe^y\, dx + x^2e^y\, dy$ è chiusa se e solo se

$$\frac{\partial(xe^y)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2e^y)}{\partial x}$$

ma questa non succede: $xe^y \neq 2xe^y$. Quindi ω non è esatta.

2c. L'integrale è ben definito perchè $\omega = xe^y\, dx + x^2e^y\, dy$ è una forma differenziale continua e γ con la parametrizzazione φ della parte **a**è una curva regolare a tratti. Calcolando a tratti abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^\pi e^{\sin t}\left[-\cos t \sin t + \cos^3 t\right]\, dt + \int_\pi^{2\pi} [t-\pi-1]\, dt \\
&= \int_0^\pi \frac{d}{dt}\left[\, e^{\sin t}\left(\sin t - \sin^2 t\right)\right]\, dt + \frac{t^2}{2}\Big|_\pi^{2\pi} - (\pi+1)\pi \\
&= e^{\sin t}\left(\sin t - \sin^2 t\right)\Big|_0^\pi + \frac{\pi^2}{2} - \pi \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \pi
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.

3a. Ricordiamo la definizione di superficie regolare e sostegno. (cf . Definizione 18.2 degli appunti)

Definizione: *Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio connesso (la chiusura di un aperto connesso). Si chiama* <u>*superficie regolare (parametrizzata)*</u> *un'applicazione $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ t.c.*

- **(SR1)** $\Phi \in C^1(D, \mathbf{R}^3)$
- **(SR2)** $\Phi_{|D^\circ}$ *è invertibile.*
- **(SR3)** $D\Phi(u,v)$ *ha rango 2 per ogni* $(u,v) \in D^\circ$

L'immagine $\Sigma = \Phi(D)$ si chiama <u>*sostegno*</u> *della superficie.*

Per una superficie regolare con dominio D regolare (e quindi misurabile) si definisce <u>*l'area di Σ*</u> via

$$A(\Sigma) = A(\Sigma; \Phi) := \iint_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv$$

e sappiamo che l'area è independente dalla parametrizzazione scelta se rimaniamo nella stessa classe di equivalenza definita da (cf. Definizione 19.2 degli appunti)

Definizione: *Siano $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ e $\Psi : D^* \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ due paramterizzazioni di una superficie regolare. Si dice* <u>*Φ è equivalente a Ψ*</u> $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, T : D^* \to D$ *diffeomorfismo di classe C^1 t.c.*

$$\Psi = \Phi \circ T \quad \text{e} \quad \Phi = \Psi \circ T^{-1}$$

In tal caso, si scrive $\Phi \sim \Psi$. Inolte si indica con $[\Phi] = \{\Psi :\ \Psi \sim \Phi\}$.

Abbiamo visto che $A(\Sigma; \Phi) = A(\Sigma; \Psi)$ se $\Phi \sim \Psi$.

3b. Con $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad ||(x,y)|| \leq 1\}$ vogliamo mostrare che Σ è il sostegno di una parametrizzazione regolare e vogliamo calcolare la sua area. Σ il grafico di $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ con dominio $D = \{(x,y) : x^2 = y^2 \leq 1\}$, ma la funzione g **non** è di classe $C^1(D)$ e quindi la parametrizzazione cartesiana non è desiderata. Invece, si può usare la parametrizzazione

$$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho) \quad (\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$

Si verifica che vale **(SR1)** dove $\Phi \in C^\infty(D)$. Poi si vede facilmente che Φ è iniettiva su D° e quindi vale **(SR2)**. Inoltre, calcolando la matrice jacobiana si trova

$$D\Phi(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2 su tutto D perchè le colonne sono indipendenti, e quindi vale **(SR3)** e la superficie e regolare.

Calcolando l'area si trova

$$\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta = (-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, \rho)$$

e quindi

$$A(\Sigma) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\rho \, d\theta d\rho = \sqrt{2}\pi.$$

3c. Vogliamo calcolare l'integrale $\int_{\partial\widetilde{\Sigma}^+} \langle F, T\rangle \, ds$ dove $F \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, $\widetilde{\Sigma} = \Phi(\widetilde{D})$, $\widetilde{D} \subset D^\circ$ è un dominio regolare, $|\widetilde{\Sigma}|_2 = A$, e $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una superficie regolare di classe $C^2(D, \mathbf{R}^3)$ t.c.

$$\operatorname{rot} F = 3\nu \quad \text{su} \quad \Sigma$$

dove ν è il campo normale definita da Φ. Siamo nella situazione in cui possiamo applicare il teorema di Stokes nello spazio essendo $\widetilde{\Sigma}$ una superficie Stokiana (cf. Definizione 21.2 ed Esempio 21.3.1 degli appunti). Si ha allora

$$\begin{aligned} \int_{\partial\widetilde{\Sigma}^+} \langle F, T \, ds &= \iint_{\widetilde{\Sigma}} \langle \operatorname{rot} F, \nu\rangle \, d\sigma = \iint_{\widetilde{\Sigma}} 3||\nu||^2 \, d\sigma \\ &= 3|\widetilde{\Sigma}|_2 = 3A \end{aligned}$$

Esercizio 4.

4a. Vogliamo calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (e^{y^2}, e^{x^2}, z-4)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad z = x^2 + y^2, \quad ||(x,y)|| \le 2\}.$$

orientata con versore normale ν con $\langle \nu, e_3 \rangle < 0$. Applichiamo il teorema della divergenza con il dominio

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \le z \le 4, \quad (x,y) \in D := \overline{B}_2(0,0)\}.$$

Questo Ω è un dominio normale regolare rispetto alle asse z dove il suo bordo $\partial\Omega = \Sigma \cup \Sigma_S$ con Σ_S la parte superiore definita da

$$\Sigma_S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad z = 4, \quad (x,y) \in D\}$$

Essendo $F \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ possiamo applicare il Teorema della divergenza e si ha

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \\ &= \iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle \, d\sigma + \iint_{\Sigma_S} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \end{aligned} \tag{10}$$

Quindi calcoliamo il nostro flusso per differenza. Si ha

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dxdydz &= \iiint_\Omega dxdydz \\ &= \iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) \, dxdy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - \rho^2)\rho \, d\theta d\rho = 8\pi \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_S} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma &= \iint_D \langle F(x,y,4), (0,0,1) \rangle \, dxdy \\ &= \iint_D 0 \, dxdy = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Combinando $(10) - (12)$ il flusso vale 8π.

4b. Siano $f, g \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio regolare. Vogliamo calcolare

$$\iiint_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x}\, dxdydz$$

dove

$$|\Omega|_3 = A, \quad (\partial f/\partial x)_{|\Omega} = 2, \quad g_{|\partial\Omega} = 0, \quad \bar{g}_{|\Omega} = B \tag{13}$$

Ricordiamo la seguente formula di *integrazione per parti* che segue dalla teorema della divergenza

$$\iiint_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x}\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} f g \langle \nu, e_1 \rangle \, d\sigma - \iiint_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x}\, dxdydz \tag{14}$$

Usando (13) la formula (14) diventa

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x}\, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} 0 \, d\sigma - \iiint_\Omega 2g \, dxdydz \\ &= -2|\Omega|_3 \bar{g}_{|\Omega} = -2AB\end{aligned}$$

4c. Vogliamo calcolare il valor medio di $g = \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3$ sul bordo $\partial\Omega$ di un dominio regolare Ω nello spazio dove $\lambda_j \in \mathbf{R},\ j = 1, 2, 3$. Condierando il campo costante $F = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ si ha $g = \langle F, \nu \rangle$ e quindi il teorema della divergenza dà

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} g \, d\sigma &= \iint_{\partial\Omega} \langle (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \nu \rangle \, d\sigma \\ &:= \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \\ &= \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dxdydz = 0,\end{aligned}$$

e quindi il valor medio di g è nullo.