

Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 24/01/06

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Notiamo che la funzione $\Phi(x, y) = x^3 + x - ye^y$ è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, quindi Φ, Φ_x sono continue nel aperto \mathbf{R}^2 . Inoltre, abbiamo

$$\Phi_x(x_0, y_0) = 3x_0^2 + 1 \geq 1 \neq 0$$

per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Quindi, per il Teorema di Dini, abbiamo la esistenza di una funzione implicita della forma $x = g(y)$ vicino ad ogni punto (x_0, y_0) per cui $\Phi(x_0, y_0) = 0$, ed, in particolare, per $(0, 0)$.

Conclusion: Esiste $\delta > 0$ per cui esiste un'unica funzione implicita $g : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(0)$; cioè

$$0 = g(0), \quad \Phi(g(y), y) = 0 \quad \forall y \in B_\delta(0).$$

Inoltre, $g \in C^\infty B_\delta(0)$.

Per trovare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 per $g \in C^\infty B_\delta(0)$, usiamo il metodo di differenziazione implicita. Basta calcolare $g'(0), g''(0)$, dove sappiamo $g(0) = 0$. Abbiamo

$$0 = g^3 + g - ye^y, \quad \forall y \in B_\delta(0), \tag{1}$$

dove $g = g(y)$. La derivata in y di (1) dà

$$0 = 3g^2 g' + g' - ye^y - e^y, \quad \forall y \in B_\delta(0). \tag{2}$$

Usando $(y, g) = (0, 0)$ in (2), si trova $g'(0) = 1$. Poi, derivando (2) in y dà

$$0 = 3g^2 g'' + 6g(g')^2 + g'' - ye^y - 2e^y, \quad \forall y \in B_\delta(0). \tag{3}$$

Usando $(y, g, g') = (0, 0, 1)$ in (3), si trova $g''(0) = 2$, e, quindi

$$x = g(y) = y + y^2 + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0.$$

1b. Per analizzare il comportamento globale notiamo che $\Phi(x, y) = x^3 + x - ye^y$ è continua su \mathbf{R}^2 con la seguente proprietà: per ogni $\bar{y} \in \mathbf{R}$, la funzione $h(x) := \Phi(x, \bar{y})$ soddisfa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x - \bar{y}e^{\bar{y}} = \pm\infty.$$

Quindi, per il Teorema degli Zeri esiste almeno un $\bar{x} \in \mathbf{R}$ per cui $h(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Ma, $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, e, quindi \bar{x} è unico. Così si definisce una funzione implicita globale $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Per tracciare uno grafico qualitativo di tale g , notiamo che:

1. $g \in C^\infty(\mathbf{R})$ essendo che localmente è la funzione liscia fornita dal Teorema di Dini nella parte **a**.
2. Sappiamo il valore $g(0) = 0$ e poi lo sviluppo $g(y) = y + y^2 + o(y^2)$ per $y \rightarrow 0$. Quindi, la funzione è crescente e convessa in un intorno di 0.
3. La funzione è strettamente crescente per $y \geq -1$, strettamente decrescente per $y \leq -1$, e, quindi c'è un minimo globale in $y = -1$ e non ci sono altri estremi locali. Infatti, formula (2), in realtà, è vera per ogni $y \in \mathbf{R}$. Quindi, abbiamo

$$g'(y) = \frac{e^y(1+y)}{1+3g^2(y)}, \quad (4)$$

Quindi, il segno di g' è quello di $y+1$, e abbiamo l'affermazione. Notiamo anche che $g(-1) < 0$ essendo $g(0) = 0$ e g è crescente in 0.

4. Possiamo anche affermare i seguenti limiti:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty.$$

Infatti, basta mandare $y \rightarrow \pm\infty$ in (1) che, di nuovo, vale per ogni $y \in \mathbf{R}$.

Da questi ingredienti, si riesce a tracciare un grafico relativamente preciso dal punto di vista qualitativo.

1c. Vogliamo trovare i parametri A, B per cui $f(x, y) = x^2 + y^2 + Ax + By$ ristretta al vincolo $\Phi(x, y) = 0$ ha un massimo locale in $(0, 0)$. Possiamo usare due metodi: la formula di Taylor della parte **a** oppure il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il vincolo $\Gamma : \Phi(x, y) = x^3 + x - ye^y = 0$ è regolare perchè $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ e $\nabla\Phi = (3x^2 + 1, -ye^ye^y) \neq (0, 0)$ su Γ (abbiamo visto $\Phi_x \neq 0$ per ogni x). La funzione f da ottimizzare è anche di classe $C^\infty(\mathbf{R}^2)$, e, quindi possiamo usare tutti gli strumenti del corso per trovare i candidati e per stabilire la natura dei punti critici. Gli unici candidati per gli estremi locali di f sono i punti critici della Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f - \lambda\Phi$. Il sistema per i punti critici di \mathcal{L} nel punto $(x, y, \lambda) = (0, 0, \lambda)$ è

$$0 = \mathcal{L}_x(0, 0, \lambda) = [2x + A - \lambda(3x^2 + 1)]_{|(0,0,\lambda)} = A - \lambda \quad (5)$$

$$0 = \mathcal{L}_y(0, 0, \lambda) = [2y + B + \lambda(ye^y + e^y)]_{|(0,0,\lambda)} = B + \lambda \quad (6)$$

$$0 = \mathcal{L}_\lambda(0, 0, \lambda) = -[x^3 + x - ye^y]_{|(0,0,\lambda)} = 0 \quad (7)$$

Quindi, abbiamo un punto critico vincolato in $(x, y, \lambda) = (0, 0, \lambda)$ se solo se

$$A = \lambda = -B. \quad (8)$$

Adesso rimane a studiare la natura dei punti $(P; \lambda) = (0, 0; \lambda)$ con $\lambda = A = -B$. Dobbiamo solo analizzare la forma quadratica $H_{f-\lambda\Phi}(P)$ sullo spazio tangente $T_P\Gamma$. Si ha

$$H_{f-\lambda\Phi}(0, 0; \lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2+2A \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Lo spazio tangente $T_P\Gamma$ ha come base il vettore $v = (1, 1)$, e, quindi,

$$T_P\Gamma = \{v = (v_1, v_1) : v_1 \in \mathbf{R}\}. \quad (10)$$

perchè sappiamo dalla parte **a** che la retta tangente al grafico della funzione implicita g definita dal vincolo ha pendenza 1. Oppure, uno può seguire la procedura generale, usando $v \perp \nabla\Phi(0, 0)$ dove $\nabla\Phi(0, 0) = (1, -1)$. Calcolando la forma quadratica $Q = \langle v, H_{f-\lambda\Phi}v \rangle$ e usando (9), (10) si trova

$$Q(v_1) = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2+2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = (4+2A)v_1^2.$$

Quindi, per avere un massimo locale ci serve che la forma sia negativa definita, ovvero $A < -2$ e quindi $B = -A > 2$.

Esercizio 2.

2a. Vogliamo stabilire se la curva γ con parametrizzazione

$$\varphi(t) = (\sin(e^t), \cos(e^t), e^t), \quad t \in [\ln(\pi/2), \ln(\pi)]$$

sia rettificabile e calcolare la sua lunghezza. Abbiamo $\varphi \in C^\infty[a, b]$ con $[a, b] = [\ln(\pi/2), \ln(\pi)]$, e, quindi φ è rettificabile e la sua lunghezza si calcola tramite l'integrale

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Abbiamo $\varphi'(t) = (e^t \cos(e^t), -e^t \sin(e^t), e^t)$, e, quindi $\|\varphi'(t)\|^2 = 2e^{2t}$. Quindi

$$L(\gamma) = \int_{\ln(\pi/2)}^{\ln(\pi)} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \Big|_{\ln(\pi/2)}^{\ln(\pi)} = \sqrt{2}\pi/2.$$

2b. Per trovare la parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di γ , ricordiamo che per una curva $C^1([\ln(\pi/2), \ln(\pi)], \mathbf{R}^3)$ il parametro di lunghezza d'arco è

$$s = s(t) = \int_{\ln(\pi/2)}^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$$

Usando il fatto $\|\varphi'(\tau)\| = \sqrt{2}e^\tau$, trovato sopra, si ha

$$s = s(t) = \sqrt{2}(e^t - \pi/2), t \in [\ln(\pi/2), \ln(\pi)]$$

dove $s : [\ln(\pi/2), \ln(\pi)] \rightarrow [0, \sqrt{2}\pi/2]$ è una biezione di classe C^∞ con inversa

$$t = t(s) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi abbiamo

$$\gamma(s) = \varphi(t(s)) = \left(\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}\right), \quad s \in [0, \sqrt{2}\pi/2].$$

È stato chiesto anche se esiste $T \in [\ln(\pi/2), \ln(\pi)]$ per cui la distanza percorsa lungo γ fino al tempo T sia 2. La funzione $s = s(t)$ è continua e suriettiva sull'intervallo $[0, \sqrt{2}\pi/2]$. Ma, essendo $2 < \sqrt{2}\pi/2$, tale T esiste.

2c. Vogliamo calcolare il valor medio $\bar{f}_{|\gamma} = L(\gamma)^{-1} \int_{\gamma} f ds$ con $f(x, y, z) = \ln(z)$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_{\ln(\pi/2)}^{\ln(\pi)} f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt = \int_{\ln(\pi/2)}^{\ln(\pi)} \sqrt{2}te^t dt \\ &= \sqrt{2} [te^t - e^t]_{\ln(\pi/2)}^{\ln(\pi)} = \sqrt{2}\pi \left(\ln(\pi) - \frac{1}{2} \ln(\pi/2) - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

dove abbiamo usato integrazione per parti. Il valor medio è

$$\bar{f}_{|\gamma} = 2 \left(\ln(\pi) - \frac{1}{2} \ln(\pi/2) - \frac{1}{2} \right).$$

Esercizio 3.

3a. Ricordiamo che una forma differenziale $\alpha = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ con $F_i(x, y, z) \in C^0(\mathbf{R}^3)$ è detta esatta se $\alpha = df$ per qualche funzione differenziabile f . Inoltre essendo \mathbf{R}^3 stellato rispetto all'origine α è esatta se e solo se ω è chiusa in \mathbf{R}^3 (cioè $\text{rot}F = 0$ ovvero vale il sistema di equazioni: $\partial F_i / \partial x_j = \partial F_j / \partial x_i$ per $i \neq j$). Quindi

basta controllare che la nostra forma con $(F_1, F_2, F_3) = (g, z, x + y)$ sia chiusa. Si calcola

$$0 = \operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g & z & x + y \end{vmatrix} = (0, g_z - 1, -g_y) \quad (11)$$

Quindi g deve soddisfare $g_z = 1$ e $g_y = 0$ e quindi $g(x, y, z) = z + h(x)$ dove h è arbitraria, ma è stato chiesto anche $g(x, 0, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e quindi $h(x) = 0$ per ogni x , ovvero $g(x, y, z) = z$.

Per trovare una funzione primitiva f per $\alpha = z dx + z dy + (x + y) dz$ basta notare che il sistema

$$f_x(x, y, z) = z, f_y(x, y, z) = z, f_z(x, y, z) = x + y$$

ha soluzione

$$f(x, y, z) = xz + yz + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

N.B. Si può anche calcolare f tramite un opportuno integrale di linea. In particolare, la primitiva che si annulla nell'origine è la funzione

$$f(x, y, z) = \int_{\gamma(x, y, z)} \alpha = \int_0^1 (txz + tyz + t(x + y)z) dt$$

dove $\gamma(t) = (tx, ty, tz)$, $t \in [0, 1]$ il segmento che va dall'origine al punto (x, y, z) in \mathbf{R}^3 stellato rispetto all'origine.

3b. Vogliamo mostrare che Σ con la parametrizzazione

$$\Phi(\theta, t) = (\operatorname{Ch}(t) \cos(\theta), \operatorname{Ch}(t) \sin(\theta), t), \quad (\theta, t) \in D = [0, \pi] \times [0, 1], \quad (12)$$

dove $\operatorname{Ch}(t) = (e^t + e^{-t})/2$ è il sostegno di una superficie regolare e poi vogliamo calcolare la sua area. Ricordiamo la definizione: $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ è una superficie regolare se

(SR1) $\Phi \in C^1(D, \mathbf{R}^3)$ con D un dominio (la chiusura di un aperto);

(SR2) Φ è iniettiva su D° ;

(SR3) La matrice $D\Phi(\theta, t)$ ha rango due per ogni $(\theta, t) \in D^\circ$.

Abbiamo $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ e D un rettangolo chiuso, quindi abbiamo **(SR1)**. Abbiamo anche la iniettività su tutto D , non solo su D° . Infatti, se $\Phi(\theta_1, t_1) = \Phi(\theta_2, t_2)$, allora abbiamo

$$t_1 = t_2 \quad \text{e} \quad \theta_2 = \theta_1 = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ma, su D , la seconda condizione è possibile solo con $k = 0$, ovvero, con $\theta_1 = \theta_2$. Quindi, abbiamo **(SR2)**. Per la condizione sul rango, notiamo che

$$D\Phi(\theta, t) = \begin{bmatrix} -\text{Ch}(t) \sin(\theta) & \text{Sh}(t) \cos(\theta) \\ \text{Ch}(t) \cos(\theta) & \text{Sh}(t) \sin(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e, quindi il rango è 2 su tutto D , non solo D° . Quindi, abbiamo **(SR3)**, e la superficie è regolare.

Per calcolare l'area, ricordiamo che serve anche D misurabile, ma lo è (è un rettangolo), e quindi

$$A(\Sigma) := \iint_D \|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| d\theta dt.$$

Calcolando, si trova

$$\begin{aligned} \Phi_\theta \wedge \Phi_t &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\text{Ch}(t) \sin(\theta) & \text{Ch}(t) \cos(\theta) & 0 \\ \text{Sh}(t) \cos(\theta) & \text{Sh}(t) \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\text{Ch}(t) \cos(\theta), \text{Ch}(t) \sin(\theta), -\text{Sh}(t)\text{Ch}(t)). \end{aligned} \quad (13)$$

Quindi,

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|^2 = \text{Ch}^2(t) + \text{Ch}^2(t)\text{Sh}^2(t) = \text{Ch}^4(t),$$

e, quindi per il teorema di riduzione sui rettangoli, abbiamo

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \text{Ch}^2(t) d\theta \right) dt \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{4} (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^{-2} + 2 \right] = \frac{\pi}{4} [\text{Sh}(2) + 2]. \end{aligned}$$

3c. Per calcolare l'integrale di linea di $\alpha = xe^z dx - ye^z dy + e^z dz$ su $\Gamma = +\partial\Sigma$, si può procedere direttamente, oppure usare il teorema di Stokes. Per applicare tale teorema, abbiamo bisogno di una forma di classe C^1 , in un intorno di Σ più una superficie ammissibile. Nel nostro caso, il campo $F = (xe^z, -ye^z, e^z)$ dei coefficienti di α è $C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, e, quindi, ammissibile. La superficie Σ è il sostegno di una *superficie Stokiana*, e, quindi, ammissibile. Infatti, ricordiamo che tale classe di superficie dovrebbe soddisfare le condizioni:

(SS1) $\Phi \in C^2(D, \mathbf{R}^2)$;

(SS2) D è un dominio regolare (vale il Teorema di Stokes in dimensione 2);

(SR3) Φ è iniettiva su D ;

(SR4) La matrice $D\Phi(\theta, t)$ ha rango due per ogni $(\theta, t) \in D$.

Abbiamo già visto che valgono le condizioni **(SS1)**, **(SS2)**, **(SS4)** nella parte **b**. Qui, D è un rettangolo, e, quindi vale anche **(SS3)**. Quindi, vale la formula di Stokes, e abbiamo

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_{+\partial\Sigma} \alpha \stackrel{\text{TdS}}{=} \iint_{\Sigma} d\alpha := \iint_{\Sigma} \langle \text{rot } F, \nu \rangle d\sigma, \quad (14)$$

dove ν è il versore normale che fornisce l'orientazione su Σ , $d\sigma$ è l'elemento d'area, e $\text{rot } F$ è il rotore del campo dei coefficienti di α .

Qui, è stato richiesta l'orientazione su Σ indotta dalla parametrizzazione Φ , e, quindi $\nu = (\Phi_{\theta} \wedge \Phi_t) / \|\Phi_{\theta} \wedge \Phi_t\|$. Ma, $d\sigma = \|\Phi_{\theta} \wedge \Phi_t\|$, e, quindi, per (13), abbiamo

$$\nu d\sigma = (\Phi_{\theta} \wedge \Phi_t) d\theta dt = (\text{Ch}(t) \cos(\theta), \text{Ch}(t) \sin(\theta), -\text{Sh}(t)\text{Ch}(t)) d\theta dt. \quad (15)$$

Calcolando il rotore troviamo

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xe^z & -ye^z & e^z \end{vmatrix} = (ye^z, xe^z, 0). \quad (16)$$

Quindi, combinando le formule (14), (15) con la (16) ristretta lungo la parametrizzazione Φ , abbiamo [con $c(\theta) := \cos(\theta)$, $s(\theta) := \sin(\theta)$]

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \alpha &= \iint_D \langle (\text{Ch}(t)s(\theta)e^t, \text{Ch}(t)c(\theta)e^t, 0), (\text{Ch}(t)c(\theta), \text{Ch}(t)s(\theta), -\text{Sh}(t)\text{Ch}(t)) \rangle d\theta dt \\ &= \iint_D (2\text{Ch}^2(t)s(\theta)c(\theta)e^t) d\theta dt \\ &= \left[\int_0^{\pi} 2s(\theta)c(\theta) d\theta \right] \left[\int_0^1 \text{Ch}(t)e^t dt \right] = 0 \left[\int_0^1 \text{Ch}(t)e^t dt \right] = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche il teorema di riduzione con una funzione integranda della forma $f(\theta, t) = g(\theta)h(t)$.

Esercizio 4.

4a. Vogliamo mostrare che il dominio

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \text{Ch}^2(z), 0 \leq z \leq 1\}$$

sia regolare e poi calcolare la sua area. Prima di cominciare, notiamo che basta avere Ω misurabile secondo Peano-Jordan per definire l'area come un integrale, ma per calcolare l'integrale via un teorema di riduzione, ci serve di più. In particolare, domini regolari sono ammissibili per il Teorema della Divergenza, che sarà usata nella parte **b**. Ricordiamo che un dominio è detto *regolare* se $\Omega = \cup_{j=1}^N \Omega_j$ con

1. Ogni Ω_j è un dominio *normale regolare*; cioè è rappresentabile come l'insieme fra due grafici di classe $C^1(D_j, \mathbf{R})$ con D_j un dominio regolare bi-dimensionale
2. $\Omega_j^\circ \cap \Omega_k^\circ = \emptyset$ se $j \neq k$.

Nel nostro caso, Ω è decomponibile in tre domini normali regolare con interni disgiunti. Ad esempio, possiamo definire:

$$\Omega_1 := \left\{ (x, y, z) : |x| \leq \sqrt{\text{Ch}^2(z) - y^2}, (y, z) \in D_1 = [-1/2, 1/2] \times [0, 1] \right\},$$

che è normale regolare rispetto all'asse x perchè D_1 è un rettangolo e le due funzioni grafici $\phi_\pm = \pm \sqrt{\text{Ch}^2(z) - y^2}$ sono $C^1(D_1, \mathbf{R})$, dove si sfrutta il fatto che $|y| \leq 1/2, \text{Ch}(z) \geq 1$ implica $\text{Ch}^2(z) - y^2 \geq 3/4 > 0$. Poi, definiamo

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y, z) : \frac{1}{2} \leq y \leq \sqrt{\text{Ch}^2(z) - x^2}, z \in [0, 1], |x| \leq \sqrt{\text{Ch}^2(z) - 1/4} \right\},$$

$$\Omega_3 = \left\{ (x, y, z) : -\sqrt{\text{Ch}^2(z) - x^2} \leq y \leq -\frac{1}{2}, z \in [0, 1], |x| \leq \sqrt{\text{Ch}^2(z) - 1/4} \right\}.$$

Abbiamo Ω_2, Ω_3 normale regolare rispetto all'asse y perchè

$$D_2 = D_3 = \left\{ (x, z) \in \mathbf{R}^2 : z \in [0, 1], |x| \leq \sqrt{\text{Ch}^2(z) - 1/4} \right\}$$

è regolare bi-dimensionale e le funzioni grafici sono di classe C^1 fino al bordo perchè $\text{Ch}^2(z) - x^2 \geq 1/4 > 0$ su $D_2 = D_3$. Quindi, il dominio è regolare.

Per calcolare il volume, sappiamo che i domini regolari sono misurabile secondo Peano-Jordan, e quindi per definizione

$$\text{Vol}(\Omega) = |\Omega|_3 = \iiint_{\Omega} dx dy dz.$$

Notando che abbiamo una simmetria cilindrica rispetto all'asse z , è utile usare le coordinate polari:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z$$

dove il nostro dominio Ω viene trasformato nel dominio

$$\Omega^* : \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, \text{Ch}(z)], 0 \leq z \leq 1.$$

Per la formula di cambiamento di variabili, e, poi, il teorema di riduzione, troviamo:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \iiint_{\Omega^*} \rho d\rho d\theta dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{\text{Ch}(z)} \rho d\rho \right) dz = \pi \int_0^1 \text{Ch}^2(z) dz \\ &= \frac{\pi}{8} [e^2 - e^{-2} + 4] \end{aligned}$$

4b. Vogliamo calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2y, y^2z^2, xz)$ uscente dal bordo di Ω , definito nella parte **a**. Essendo Ω regolare e $F \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, e, quindi $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$, possiamo applicare il Teorema della Divergenza per affermare

$$\text{flusso}(F, \partial\Omega) := \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma \stackrel{\text{TdD}}{=} \iiint_{\Omega} \text{div } F dx dy dz,$$

dove

$$\text{div } F := \partial_x(x^2y) + \partial_y(y^2z^2) + \partial_z(xz) = 2xy + 2yz^2 + x.$$

Quindi,

$$\text{flusso}(F, \partial\Omega) = \iiint_{\Omega} (2xy + 2yz^2 + x) dx dy dz = 0,$$

perchè Ω è simmetrico nelle direzioni di x e nella direzione di y e $2xy + 2yz^2 + x$ è la somma di funzioni dispari in y o in x . In modo alternativo, si può calcolare direttamente l'integrale, sfruttando le coordinate cilindriche, per esempio.

4c. Vogliamo calcolare la derivata in r del flusso locale di $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$, uscendo dalla palla $B_r(P)$ con $P \in \Omega$ aperto e F un campo con divergenza costante uguale ad $c \in \mathbf{R}$. Essendo Ω aperto, per ogni $P \in \Omega$ esiste $R = R(P)$ per cui $\bar{B}_r(P) \subset \Omega$ per ogni $r \in (0, R(P)]$. Quindi, ha senso calcolare per ogni $r \in (0, R(P))$ la derivata

$$\frac{\partial}{\partial r} \iint_{\partial B_r(P)} \langle F, \nu \rangle d\sigma.$$

Possiamo semplificare il calcolo, applicando il Teorema della Divergenza. Tale teorema è applicabile perchè $B_r(P)$ è un dominio regolare e $F \in C^1(\bar{B}_r(P))$. Abbiamo

$$\iint_{\partial B_r(P)} \langle F, \nu \rangle d\sigma \stackrel{\text{TdD}}{=} \iiint_{B_r(P)} c dx dy dz = c |\bar{B}_r(P)|_3 = c \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right).$$

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial r} (\text{flusso}(F, \partial B_r(P))) = 4\pi r^2 c, \quad \forall r \in (0, R(P)).$$