Traccia delle soluzioni della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 02/05/06

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

- $\Phi(x,y,z) = xy^2z^3 - 108$ è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ e $\Phi_z(x_0, y_0, z_0) = 3x_0y_0^2z_0^2 \neq 0$ su Γ perchè $x, y, z \neq 0$ su Γ. Quindi, si applica il Teorema di Dini.
- Usando il metodo di differenziazione implicita si trova $g(x,y) = P_2(x,y) + o(||(x-3, y-6)||)$ per $(x,y) \to (3,6)$ dove $P_2(x,y)$ è:
$$1 - \frac{1}{9}\left[(x-3) + (y-6)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{81}(x-3)^2 + \frac{2}{81}(x-3)(y-6) + \frac{5}{162}(y-6)^2\right].$$
- g è convessa vicino $(3,6)$; infatti, si ha $\mathrm{tr} H_g(3,6), \det H_g(3,6) > 0$, dove $H_g(3,6)$ è la matrice hessiana.

- Il vincolo Γè regolare e le funzioni Φ, f sono almeno $C^2(\mathbf{R}^3)$ (sono C^∞) e quindi si applica tutta la nostra teoria di Lagrange.
- Gli unici candidati per estremi locali sono i punti critici della lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f - \lambda\Phi$ che sono $(x,y,z;\lambda) = \pm(1,2,3;1/324)$ ma è stato richiesto solo quelli con $y > 0$.
- Per la natura, si trova che lo spazio tangente al vincolo in $P = (1,2,3)$ è
$$T_P\Gamma = \{v = (v_1, v_2, -v_1 - v_2) : \quad v_1, v_2 \in \mathbf{R}\}$$
e che la matrice hessiana è
$$H_{f-\lambda\Phi}(1,2,3;1/324) = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$
Quindi la forma quadratica $Q = H_{f-\lambda\Phi}$ ristretta a $T_P\Gamma$ è
$$Q(v_1, v_2) = -\left[6v_1^2 + 3v_2^2 + 2(v_1+v_2)^2\right],$$
e abbiamo un massimo locale.

Esercizio 2.

- La parametrizzazione $\varphi(t) = (\cos t, |\sin t|, t) \in C^1([-\pi/2, 0]) \cap C^1([0, \pi/2])$, e, quindi è rettificabile con lunghezza

$$L(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{0} ||\varphi'(t)||\, dt + \int_{0}^{\pi/2} ||\varphi'(t)||\, dt.$$

- Si ha $||\varphi'(t)|| = \sqrt{2}$ per entrambi pezzi, e quindi $L(\varphi) = \sqrt{2}\pi$.

- La forma differenziale $\omega \in C^\infty(A, (\mathbf{R})^*)$ con $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ y \neq -1\}$ dove

$$\omega = 2x \cos(z)\, dx + \frac{1}{1+y}\, dy - x^2 \sin(z)\, dz.$$

  Il sostegno γ di *varphi* è contenuto nel semi-spazio A^+ dove $y > -1$. Si ha ω chiusa in A^+ convesso (quindi stellato), pertanto ω è esatta e abbiamo

$$\int_\gamma \omega = f(\varphi(\pi/2)) - f(\varphi(-\pi/2))$$

  dove f è una qualsiasi primitiva di ω.

- Le primitive sono tutte della forma

$$f(x, y, z) = x^2 \cos(z) + \ln(y+1) + C, \quad C \in \mathbf{R},$$

  e, $\varphi(\pm\pi/2) = (0, 1, \pm\pi/2)$. Quindi, $\int_\gamma \omega = 0$.

Esercizio 3.

- L'insieme

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : \quad 0 \leq u \leq \pi, \ 0 \leq v \leq h(u)\}$$

  con $h \in C^1([0, \pi])$ è un dominio conesso (chiusura di un aperto) ed è anche un dominio regolare bi-dimesionale (quindi misurabile). La parametrizzazione

$$\Phi(u, v) = (R(u) \cos(u), R(u) \sin(u), v), \quad (u, v) \in D$$

  con $R \in C^1([0, \pi])$ è $C^1(D, \mathbf{R}^3)$, quindi abbiamo **(SR1)**.

- Usando la monotonia e la non-negatività di R, si mostra che Φ è iniettiva su D°, e, quindi abbiamo **(SR2)**,
- Calcolando il jacobiano, si trova

$$D\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} R'(u)\cos(u) - R(u)\sin(u) & 0 \\ R'(u)\sin(u) + R(u)\cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  e, usando $u, R > 0$ su D° si mostra che $D\Phi$ ha rango 2 su D°. Quindi, abbiamo (**SR3**), e la superficie è regolare.
- Per trovare un'esspressione per l'area di Σ, è giustificato

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &:= \iint_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, d\theta dt \\ &= \int_0^\pi h(u)\sqrt{R(u)^2 + (R'(u))^2}\, du, \end{aligned}$$

  dove si sfrutta

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = (R'(u)\sin(u) + R(u)\cos(u), R(u)\sin(u) - R'(u)\cos(u), 0)\,.$$

- Nel caso concreto $R(u) = h(u) = u$, l'equazione del piano tangente nel punto $(0, \pi/2, \pi/2) = \Phi(\pi/2, \pi/2)$ è

$$0 = \langle (x, y - \pi/2, z - \pi/2), \Phi_u \wedge \Phi_v(\pi/2, \pi/2) \rangle,$$

  e si trova

$$0 = x + (y - \pi/2).$$

- L'area in questo caso si calcola

$$A(\Sigma) = \int_0^\pi u\sqrt{u^2+1}\, du = \frac{1}{3}\left[(\pi^2+1)^{3/2} - 1\right].$$

Esercizio 4.

- L'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le z \le e^{2-(x^2+y^2)}, \;\; x^2+y^2 \le 1\}$$

è banalmente un dominio regolare (è normale regolare rispetto l'asse z), e, quindi, si calcola il suo volume mediante l'integrale

$$|\Omega|_3 = \iiint_\Omega dxdydz.$$

- Usando coordinate cilindriche, si trova

$$\begin{aligned}|\Omega|_3 &= \int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^{e^{2-\rho^2}} \rho \left(\int_0^\pi d\theta \right) dz \right) d\rho \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{2-\rho^2} - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \pi \left[e^2 - e - \frac{1}{2} \right].\end{aligned}$$

- Per calcolare il flusso si può applicare il Teorema della divergenza perchè Ω è un dominio regolare e $F \in C^\infty(\Omega; \mathbf{R}^3))$. Si ha $\operatorname{div} F(x,y,z) = x^2 + y^2$, e, quindi via coordinate cilindriche ed integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma &= \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2 \right) dxdydz \\ &= \int_0^1 \rho^3 \left(\int_{\rho^2}^{e^{2-\rho^2}} \left(\int_0^\pi d\theta \right) dz \right) d\rho \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{6}\rho^6 - \frac{1}{2}\rho^2 e^{2-\rho^2} - \frac{1}{2} e^{2-\rho^2} \right]_0^1 = \pi \left[e^2 - 2e - \frac{1}{3} \right].\end{aligned}$$

- Dalle ipotesi è ben definito il campo vettoriale ν dei versori normali esterni e Ω è ammissibile per il Teorema della Divergenza.

- Fissiamo $\bar{x} \in \partial\Omega$ e definiamo l'intorno al bordo $\Gamma_\epsilon = B_\epsilon(\bar{x}) \cap \partial\Omega$ e il cono con vertice all'origine determinato da Γ_ϵ, ovvero $K_\epsilon = \bigcup_{x \in \Gamma_\epsilon} [0, x]$ che è un sottoinsieme di Ω stellato.

- Applicando il TdD, si trova

$$\iint_{\partial K_\epsilon} \langle x, \nu \rangle = \iiint_{K_\epsilon} \operatorname{div} x \, dx = 3|K_\epsilon|_3 > 0.$$

- Ma, il campo $F(x) = x$ è tangenziale lungo il bordo laterale di ∂K_ϵ e quindi abbiamo un'espressione per i valor medie locali di $g(x) = \langle x, \nu(x) \rangle$:

$$\frac{1}{|\Gamma_\epsilon|_2} \iint_{\Gamma_\epsilon} \langle x, \nu \rangle \, d\sigma = 3 \frac{|K_\epsilon|_3}{|\Gamma_\epsilon|_2} > 0.$$

- Prendendo il limite per $\epsilon \to 0^+$, si ottiente $g(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \nu(\bar{x}) \geq 0$.