Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 17/02/04

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Teorema: (di Dini) *Sia* $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *dove* A *è aperto. Denotiamo con* $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ *un elemento generico di* A*. Supponiamo*

$$\textbf{i)} \quad \Phi, \Phi_y \in C^0(A)$$

$$\textbf{ii)} \quad \text{esiste } (x_0, y_0) \in A \text{ tale che } \Phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono intorni $B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^2, B_\rho(y_0) \subset \mathbf{R}$ *in cui esiste un'unica funzione* $g =: B_\delta(x_0) \to B_\rho(y_0)$ *tale che* $y_0 = g(x_0)$ *e* $\Phi(x, g(x)) = 0$ *per ogni* $x \in B_\delta(x_0)$*. Inoltre* $g \in C^0(B_\delta(x_0), \mathbf{R})$*.*

Se inoltre $\Phi \in C^1(A)$ *si ha* $g \in C^1(B_\delta(x_0), \mathbf{R})$ *e vale*

$$g_{x_i}(x) = -\Phi_{x_i}(x, g(x))/\Phi_y(x, g(x)), \quad x \in B_\delta(x_0), \quad i = 1, 2$$

Se inoltre $\Phi \in C^k(A), k \geq 2$ *si ha* $g \in C^k(B_\delta(x_0))$*.*

1b. Vogliamo trovare i punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma = \Phi^{-1}(0)$ tali che Γ non definisce un vincolo regolare. La funzione $\Phi(x, y, z) = z^3 + 2xz + x^2 - y^2$ è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^3)$ e quindi basta trovare $P_0 \in \Gamma$ tali che $\nabla\Phi(P_0) = 0$. Abbiamo

$$\nabla\Phi(x, y, z) = (2z + 2x, -2y, 3z^2 + 2x)$$

e quindi i punti critici sono dati da

$$x = -z, \quad y = 0, \quad z(3z - 2) = 0$$

e quindi ci sono due punti critici $P_0 = (0, 0, 0), (-2/3, 0, 2/3)$ per cui $\Phi(0, 0, 0) = 0$ ma $\Phi(-2/3, 0, 2/3) = -4/27 \neq 0$. Quindi Γ è regolare tranne in $(0, 0, 0)$.

Adesso il punto $(0, 1, 1) \in \Gamma$ perchè $\Phi(0, 1, 1) = 0$ ed inoltre $\nabla\Phi(0, 1, 1) = (2, -2, 3) \neq 0$ e quindi per il teorema di Dini Γ è esplicitabile localmente come un grafico di una funzione di classe C^∞ e l'lequazione del piano tangente è

$$0 = \langle (x - 0, y - 1, z - 1), \nabla\Phi(0, 1, 1) \rangle = 2x - 2(y - 1) + 3(z - 1).$$

1c. Vogliamo trovare i candidati per gli estremi locali di $f_{|\Gamma}$ dove $f(x,y,z) = z$. Essendo $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ i candidati per gli estremi locali di f sono: **i)** i punti irregolari di Γ (cioè $P_0 = (0,0,0)$) **ii)** i punti critici della lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f - \lambda\Phi$. Il sistema per i punti critici di $\mathcal{L}$ è

$$0 = \mathcal{L}_x = -\lambda(2z + 2x) \quad (1)$$

$$0 = \mathcal{L}_y = -\lambda(-2y) \quad (2)$$

$$0 = \mathcal{L}_z = 1 - \lambda(3z^2 + 2x) \quad (3)$$

$$0 = \mathcal{L}_\lambda = -(z^3 + 2xz + x^2 - y^2) \quad (4)$$

Risolvendo il sistema si trova da (2) $y = 0 \vee \lambda = 0$ ma $\lambda \neq 0$ per la (3) e quindi $y = 0$. Allora da (1) si ha $x = -z$ e quindi (4) dà $z = 0 \vee z = 1$. Ma $z = 0$ se e solo se $x = 0$ (per la (1)) e questo è impossibile per la (3). Quindi l'unico punto critico vincolato è $(-1,0,1)$. Communque i candidati per i luoghi degli estremi vincolati sono due: $(0,0,0)$ - un punto irregolare e $(-1,0,1)$ - un punto critico vincolato con molteplicatore di lagrange $\lambda = 1$ (come si vede da (3)).

Rimane solo a studiare la natura di $P_0 = (-1,0,1)$. Per questo serve analizzare la forma quadratica $H_{f-\lambda_0\Phi}(-1,0,1)$ (dove $\lambda_0 = 1$) ristretta allo spazio tangente al vincolo $T_{(-1,0,1)}\Gamma$. Questo spazio è formato dai vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ tali che

$$0 = \langle \nabla\Phi(-1,0,1), (v_1, v_2, v_3)\rangle = v_3$$

e quindi sono le direzioni paralelle al piano xy. Calcolando si trova

$$H_{f-\Phi}(-1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$Q(v_1, v_2, 0) = \langle (v_1, v_2, 0), H_{f-\Phi}(-1,0,1)(v_1, v_2, 0)\rangle = 2v_1^2 - 2v_2^2$$

Segue che il punto $(-1,0,1)$ è un punto di sella.

N.B. Non è stata richiesta ma l'unico altro candidato per un estremo locale (il punto $(0,0,0)$) è anche un punto di sella (nè massimo nè minimo).

Esercizio 2.

2a. Ricordiamo che una curva continua γ con parametrizzazione $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ si chiama *rettificabile* se esiste finito

$$L(\varphi) = \sup_{\mathcal{P}} \{ l(\varphi_{\mathcal{P}}) : \ \varphi_{\mathcal{P}} \text{ poligonale inscritta in } \varphi \}$$

dove per una partizione $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ di $[a, b]$ si definisce

$$l(\varphi_{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^{N} ||\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})||.$$

Una curva con parametrizzazione $\varphi \in C^1([a, b], \mathbf{R}^n)$ è rettificabile. La dimostrazione si base sulla **proprietà del valor medio**: *Sia* $\varphi : I = [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ *una curva continua che è derivabile in* $I \setminus \mathcal{S}$ *con* S *un insieme finto di punti, allora vale la stima*

$$||\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)|| \leq \sup_{[\alpha,\beta]\setminus\mathcal{S}} ||\varphi'||(\beta - \alpha).$$

Infatti, per ogni partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$ abbiamo

$$\begin{aligned} l(\varphi_{\mathcal{P}}) &= \sum_{j=1}^{N} ||\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})|| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \sup_{[t_{j-1}, t-j]} ||\varphi'(t)||(t_j - t_{j-1}) \\ &\leq \max_{[a,b]} ||\varphi'|| \sum_{j=1}^{N} (t_j - t_{j-1}) = M(b - a) \end{aligned}$$

dove M è il massimo di $||\varphi'||$ su $[a, b]$ compatto che esiste per l'optesi di continuità su φ'.

2b. La parametrizzazione $\varphi(t) = (\sin t, \sin^{3/2} t), t \in [0, \pi/2]$ è di classe C^1 e quindi è rettificabile e la lunghezza del suo sostegno $\gamma = \varphi([0, \pi/2])$ è uguale all'integrale

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} ||\varphi'(t)||\, dt.$$

quest'integrale è facile calcolare direttamente e si trova

$$L(\gamma) = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} - 1 \right). \tag{5}$$

Infatti si ha $\varphi'(t) = (\cos t, \cos t(3 \sin^{1/2} t)/2$ e quindi

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t + \frac{9}{4} \cos^2 t \sin t \right)^{1/2} dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{9}{4} \sin t \right)^{1/2} \cos t\, dt \\ &= \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4} \sin t \right)^{3/2} \Bigg|_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

da cui segue (5).

N.B. Il conto è più pulito (sopratutto per trovare la formula per la lunghezza d'arco) se sfruttiamo l'invarianza della lunghezza rispetto una parametrizzazione equivalente. Qui si nota che $\tau = g(t) = \sin t$ è una biezione da $I = [0, \pi/2] \to J = [0, 1]$ di classe C^∞ con inversa $t = g^{-1}(\tau)$ continua su J e di classe C^∞ nell'interno di J. Quindi possiamo calcolare la lunghezza via la parametrizzazione

$$\psi(\tau) = \varphi \circ g^{-1}(\tau) = (\tau, \tau^{3/2}), \quad \tau \in [0, 1].$$

Vogliamo il parametro di lunghezza d'arco che si può calcolare tramite la parametrizzazione ψ. Abbiamo allora $\psi'(\tau) = (1, (3\tau^{1/2})/2)$ e quindi

$$\begin{aligned} s = s(\tau) &= \int_0^\tau ||\psi'(t)||\, dt = \int_0^\tau \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{1/2} dt \\ &= \frac{8}{27}\left(\left(1 + \frac{9}{4}\tau\right)^{3/2} - 1\right) \end{aligned}$$

Abbiamo allora $s : [0, 1] \to [0, L(\gamma)] = [0, 8((13/4)^{3/2} - 1)/27]$ un diffeomorfismo di classe C^1 e per scrivere la parametrizzazione

$$\gamma(s) = \psi(\tau(s)) = (\tau(s), (\tau(s))^{3/2}) \tag{6}$$

ci serve una espressione per τ. Risolvendo l'equazione $s = s(\tau)$ si trova

$$\tau = \tau(s) = \frac{4}{9}\left(\left(1 + \frac{27}{8}s\right)^{2/3} - 1\right) \tag{7}$$

Si inserisce (7) nella formula (6) per trovare: con $s \in 8((13/4)^{3/2} - 1)/27]$

$$\gamma(s) = \left(\frac{4}{9}\left[\left(1 + \frac{27}{8}s\right)^{2/3} - 1\right], \left(\frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{27}{8}s\right)^{2/3} - 1\right]\right)^{3/2}\right).$$

Questa formula è uguale a quella che risulta usando φ.

2c. Per calcolare $\int_\gamma \omega$ con $\omega = e^x\, dx + xy\, dy$ possiamo usare qualsiasi parametrizzazione equivalente a quella data φ. Per esempio possiamo usare quella di ψ. Usano $\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (\sin t, \sin^{3/2} t)$ con $t \in [0, \pi/2]$ si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{\pi/2} \left(e^{x(t)} x'(t) + x(t)y(t)y'(t)\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(e^{\sin t} + \frac{3}{2} \sin^3 t \right) \cos t \, dt$$

$$= \left(e^{\sin t} + \frac{3}{8} \sin^4 t \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = e - \frac{5}{8}$$

N.B. La sostituzione $\tau = \sin t$ nell'integrale sopra dà la espressione per $\int_\gamma \omega$ usando la parametrizzazione ψ.

Esercizio 3.

3a. Ricordiamo inanzitutto la seguente:
Definizione: *Si chiama* <u>*superficie regolare*</u> *un'applicazione* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *tale che*

(SR1) *D è un dominio (la chiusura di un aperto) connesso e* $\Phi \in C^1(D)$.

(SR2) *Φ è iniettiva su D° (l'interno di D).*

(SR3) *La matrice Jacobiana $D\Phi(u,v)$ ha rango 2 per ogni $(u,v) \in D^\circ$.*

Si vede che $\Phi(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ per $(u,v) \in D = [1, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]$ è di classe $C^\infty(D)$ con D un dominio connesso, quindi vale (SR1). Per la iniettività (SR2) si nota che $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2)$ implica subito che $v_1 = v_2 = v$ e quindi si ha

$$[u_1 = u_2] \vee [\cos v = \sin v = 0],$$

ma la seconda possibilità è assurda, e quindi Φ è una biezione su tutto D (non solo sul interno). La matrice Jacobiana è

$$D\phi(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ha rango 2 per ogni (u,v) avendo due righe linearmente indipendente e quindi vale anche (SR3). Di nuovo si usa il fatto che non esiste v tale che $\cos v = \sin v = 0$.
N.B. È anche chiaro che Φ è una superficie regolare con bordo ed è stokiana.

Si nota che D è anche misurabile secondo Peano-Jordan (è un rettangolo!) e quindi l'area del sostegno e ben definito come l'integrale

$$A(\Sigma) = \iint_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v|| \, dudv.$$

Dalla matrice jacobiana sopra si vede

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u) \tag{8}$$

Quindi $||\Phi_u \wedge \Phi_v|| = \sqrt{1+u^2}$ e possiamo applicare il teorema della riduzione (perchè la funzione integranda è continua su un dominio normale):

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \iint_D \sqrt{1+u^2}\, dudv = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1+u^2}\, dv \right) du \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+u^2}\, du \end{aligned}$$

Quindi tutto il conto riduce per la n-esima volta alla *bestia* $\int \sqrt{1+u^2}\, du$. Facendo la sostituzione $u = \tan\theta$ e ricordando l'identità $1 + \tan^2 = \sec^2$ si trova

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/3} |\sec\theta| \sec^2\theta\, d\theta = \pi \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec^3\theta\, d\theta \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \left[\tan\theta\sec\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \pi \left[2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

dove abbiamo integrato $\sec^3\theta$ per parti usando $\tan'(\theta) = \sec^2(\theta)$ e usato i valori noti per le funzioni trigonometriche in $\theta = \pi/4, \pi/3$.

3b. Ricordiamo le definizioni

Definizione: *Sia $F : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo vettoriale in A aperto e connesso con componenti $F = (F_1, F_2, F_3)$. Si dice*

a) *$F \in C^0(A, \mathbf{R}^3)$ è <u>conservativo in A</u> se esiste $U : A \to R$ una funzione di classe C^1 tale che $\nabla U = F$ in A.*

b) *$F \in C^1(A, \mathbf{R}^3)$ è <u>irrotazionale in A</u> se*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A.$$

Abbiamo visto che ogni campo conservativo gode la proprietà che il lavoro effettuato lungo ogni curva orientata, regolare a tratti, con sostegno in A dipende solamente dagli estremi della curva. In particolare, il lavoro lungo curve chiuse è zero. Inolte abbiamo mostrato che ogni campo conservativo di classe C^1 deve essere irrotazionale ma esistono campi vettoriali irrotazionali ma non conservativi (su domini con "bucchi"). D'altre parte, abbiamo visto che i due concetti sono uguali su domini *stellati* ($\exists x_0 \in A : [x_0, x] \subset A\ \forall x \in A$). La stessa affermazione è valida nei domini *semplicamente connessi.*

3c. Il campo vettoriale $F(x,y,z) = (xz, yz, y^2)$ è di classe C^∞ ed il suo rotore

$$\text{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & yz & y^2 \end{vmatrix} = (y, x, 0) \tag{9}$$

non è zero su nessun aperto di $\mathbf{R}^3$; solo sulla retta $\{(0,0,z): \ z \in \mathbf{R}\}$. Quindi in ogni aperto F non soddisfa la condizione necessaria di essere conservativo.

Il lavoro effettuato da F di classe C^∞ lungo la curva γ^+ che è il bordo orientato della superficie Stokiana definita in parte **a** si può calcolare tramite il *Teorema di Stokes*:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^+} \langle F, T\rangle \, ds &= \int_{\partial^+\Sigma} \langle F, T\rangle \, ds = \int\int_\Sigma \langle \text{rot}F, \nu\rangle \, d\sigma \\
&= \int\int_D \langle \text{rot}F(\Phi(u,v), \Phi_u \wedge \Phi_v\rangle \, dudv \\
&= \int\int_D \langle (u\sin v, u\cos v, 0), (\sin v, -\cos v, u)\rangle \, dudv \\
&= \int\int_D u(\sin^2 v - \cos^2 v), \ dudv \\
&= (\sqrt{3} - 1) \int_0^{2\pi} (-\cos(2v)) \, dv = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \sin(2v)|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

dove abbiamo anche usato le formule (8) e (9). Si nota che il lavoro è nullo su questa curva nonostante il fatto che il campo non è conservativo. Puo capitare.

Esercizio 4.

4a. Per verificare che l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le e^{-z}, \ y \ge 0, \ 0 \le z \le h\}$ con $h > 0$ è misurabile secondo Peano-Jordan ricordiamo che basta vedere che i) Ω è limitato (lo è ovviamente), ii) il bordo $\partial\Omega$ ha misura nulla $|\partial\Omega|_3 = 0$. Il bordo può essere scritto come $\partial\Omega = \Sigma_S \cup \Sigma_I \cup \Sigma_L^+ \cup \Sigma_L^-$ dove

$$\Sigma_S = \text{graf}(g_S), \quad z = g_S(x,y) = h, \quad (x,y) \in \overline{B}_{e^{-h}}(0) \cap \{y \ge 0\}$$

$$\Sigma_I = \text{graf}(g_I), \quad z = g_S(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{B}_1(0) \cap \{y \ge 0\}$$

$$\Sigma_L^- = \text{graf}(g_L^-), \quad y = g_L^-(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D = \{0 \le z \le h, \ \ |x| \le e^{-z}\}$$

$$\Sigma_L^+ = \text{graf}(g_L^+), \quad y = g_L^+(x,y) = \sqrt{e^{-z} - x^2}, \quad (x,y) \in D$$

sono quattro superficie sono grafici di funzioni continua su domini compatti e quindi sono di misura nulla. L'unione finito di insiemi di misura nulla ha misura nulla e quindi la tesi.

Per calcolare la sua area, possiamo integrare per stratti in z dove la sezione $D_z(t) = \{(x,y) : (x,y,z) \in \Omega, z = t\}$ è un semi-disco di raggio $e^{-z/2}$ e quindi

$$\begin{aligned} |\Omega|_3 &= \iiint_\Omega dxdydz = \int_0^h \left(\iint_{D_z(t)} dxdy \right) dt \\ &= \int_0^h (|D_z(t)|_2)\, dt = \frac{\pi}{2} \int_0^h e^{-t}\, dt = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-h}) \end{aligned}$$

N.B. Si potrebbe usare anche coordinate cilindriche (ρ, θ, z) dove il dominio trasformato è Ω^* definito da: $(\theta, z) \in [0, \pi] \times [0, h]$ e $0 \le \rho \le e^{-z/2}$. Questo cambiamento di variabile dà

$$|\Omega|_3 = \int_{\Omega^*} \rho\, d\rho d\theta dz$$

dove integrazione in θ e ρ produce lo stesso inegrale $\frac{\pi}{2} \int_0^h e^{-z}\, dz$ calcolato sopra.

4b. Il dominio dato Ω è l'unione di due domini normali e regolari ripsetto l'asse z. Infatti, si può fare la decomposizione $\Omega = \Omega_I \cup \Omega_E$ di una parte interna e una parte esterna

$$\Omega_I = \{(x,y,z) : 0 \le z \le h, \quad (x,y) \in \overline{B}_{e^{-h}}(0) \cap \{y \ge 0\}$$

$$\Omega_E = \{(x,y,z) : 0 \le z \le -\ln(x^2 + y^2), \quad (x,y) \in [\overline{B}_1(0) \setminus \overline{B}_{e^{-h}}(0)] \cap \{y \ge 0\}$$

Questi due pezzi sono normali rispetto l'asse z con lati superiori/inferiori formati di grafici di funzioni di classe C^1 su domini bidemnsionali normali regolari.

Per calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (xe^{xy}, -ye^{xy}, z^2)$ uscente dal bordo di Ω possiamo usare il *Teorema della divergenza* perchè Ω è ammissibile per tale teorema e $F \in C^1(\Omega)$. Si ha (con la solita notazione per ν il versore normale esterno, $d\sigma$ l'elemento di area sul bordo, etc.)

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle\, d\sigma = \iiint_\Omega \mathrm{div} F\, dxdydz$$

dove la divergenza di F è

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(-ye^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2z$$

e quindi integrando di nuovo per strati in z (oppure usando coordinate cilindriche) si ha

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma &= \iiint_{\Omega} 2z \, dxdydz = \int_0^h \left(\iint_{D_z(t)} 2t \, dxdy \right) dt \\
&= \int_0^h (|D_z(t)|_2) \, 2t \, dt = \pi \int_0^h te^{-t} \, dt = \pi[-te^{-t} - e^{-t}]_0^h \\
&= \pi[-he^{-h} - e^{-h} + 1]
\end{aligned}
$$

4c. Vogliamo mostrare il seguente

Proposizione: *Siano Ω un aperto in $\mathbf{R}^3$ e $u \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$ con la proprietà che il flusso del gradiente uscente da ogni palla in Ω si annula. Allora u soddisfa l'equazione di Laplace in Ω*

Per ipotesi, fissati $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $B_r(x_0) \subset \Omega$ si ha

$$
0 = \iint_{\partial B_r(x_0)} \langle \nabla u, \nu \rangle \, d\sigma
$$

ma prendendo r ancora più piccolo possiamo assumere che $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$ e quindi abbiamo $\nabla u \in C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbf{R}^3)$ dove $\overline{B}_r(x_0)$ è ammissibile per il teorema della divergenza. Quindi si ha

$$
0 = \iiint_{\overline{B}_r(x_0)} \operatorname{div}(\nabla u) \, dx \tag{10}
$$

ma il divergenza del gradiente è *l'operatore di laplace*; cioè

$$
\Delta u(x) = (\operatorname{div} \nabla u)(x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) \tag{11}
$$

e quindi combinando (10) e (11) per ogni $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ si ha

$$
0 = \iiint_{\overline{B}_r(x_0)} \Delta u(x) \, dx
$$

e quindi dividendo per il volume della palla abbiamo il

$$
\overline{\Delta u}_{|\overline{B}_r(x_0)} = 0
$$

ovvero che il valor medio di Δu su ogni palla piccola attorno ad x_0 si annula. Prendendo il limite si trova

$$
\Delta u(x_0) = \lim_{r \to 0^+} \overline{\Delta u}_{|\overline{B}_r(x_0)} = 0
$$

usando anche la continuità di Δu.