

## SOLUZIONI DELLO SCRITTO DI LUGLIO (11/07/2008)

### C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. K. R. Payne e Dott. M. Calanchi, C. Tarsi, L. Vesely

#### Esercizio 1.

(a)(i) Sia  $f : I = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & x \in (0, 1] \\ \alpha - 2 & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Per trovare  $\alpha$  tale che  $f \in \mathcal{R}(I)$ , ricordiamo che  $f$  deve essere limitata. Quindi è necessario  $\alpha \geq 0$ . In tal caso, la funzione risulta limitata con al più una discontinuità in  $x = 0$ . Quindi  $f \in \mathcal{R}(I)$  se e solo se  $\alpha \geq 0$

(ii) Per trovare  $\alpha \geq 0$  tale che  $f$  ammette primitiva in  $I$ , ricordiamo che  $f$  deve soddisfare la proprietà di Darboux (dei valori intermedi). Se  $\alpha = 0$  abbiamo  $f(x) = -2$  per ogni  $x \in [-1, 0]$  e, in particolare  $f(0) = -2$ . Ma  $f(x) = \sin(1/x)$  per  $x \in (0, 1]$  perciò  $f(2/\pi) = -1$ . D'altra parte, non esiste  $x \in (0, 2/\pi)$  per cui  $f(x) \in (-2, -1)$ . Quindi  $f$  non soddisfa la proprietà di Darboux per  $\alpha = 0$ .

Per  $\alpha > 0$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  con  $|f|$  decrescente per  $x \rightarrow 0^+$  ma  $f(0) = \alpha - 2 \neq 0$  per  $\alpha \neq 2$ . Quindi manca la proprietà di Darboux anche per  $\alpha \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ . Rimane solo il caso  $\alpha = 2$  per cui  $f$  risulta continua su  $I$  ed ammette primitiva per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. In conclusione, per  $\alpha \geq 0$ ,  $f$  ammette primitiva se e solo se  $\alpha = 2$ .

(b) Sia  $F$  la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{\log|2+t|}{\sqrt[3]{t(1+t+t^2)^{1/2}}} dt$$

**Dominio di  $F$ :** La funzione integranda  $f(t) = \frac{\log|2+t|}{\sqrt[3]{t(1+t+t^2)^{1/2}}}$  è continua per  $t \neq 0, -2$  perciò  $F$  è definita sicuramente per  $x \in (0, +\infty)$  e abbiamo  $F(1) = 0$ . Analizzando il comportamento asintotico di  $f$  per  $t \rightarrow 0$  si trova

$$f(t) \sim \frac{\log 2}{t^{1/3}} \quad \text{per } t \rightarrow 0^\pm$$

perciò  $f$  è integrabile in senso generalizzato in un intorno di  $t = 0$  e abbiamo  $(-2, +\infty) \subset \text{dom}(F)$ . Inoltre, per  $t \rightarrow -2$  si trova

$$f(t) \sim C \log|t+2| \quad \text{per } t \rightarrow -2^\pm$$

perciò  $f$  è integrabile in senso generalizzato in un intorno di  $t = -1$  e abbiamo  $\text{dom}(F) = \mathbb{R}$ .

**Limiti di  $F$  agli estremi del dominio:** Dobbiamo analizzare i limiti per  $x \rightarrow \pm\infty$  dove

$$f(t) \sim \frac{\log |t|}{t^{1/3}|t|} \text{ per } t \rightarrow \pm\infty.$$

Quindi abbiamo  $f$  integrabile in senso generalizzato a  $\pm\infty$  ed esiste finito i limiti  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = L_{\pm}$ . Abbiamo asintoti orizzontali a  $\pm\infty$  dove è ancora da analizzare il segno dei limiti  $L_{\pm}$ . Sarà chiaro che  $L_+ > 0$  ma il segno di  $L_-$  non è chiaro.

**Monotonia ed estremi locali:** Per il TFCl, abbiamo  $F$  derivabile per  $x \neq 0, -2$  ed analizzando il segno di  $f$  si trova

$$f(t) > 0 \text{ per } t \in (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$f(t) < 0 \text{ per } t \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0).$$

Quindi  $F$  è strettamente crescente per  $x \in [-3, -1] \cup [0, +\infty)$  e strettamente decrescente per  $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, 0]$ . Inoltre, abbiamo minimi locali in  $x = -3, 0$  ed un massimo locale in  $x = -1$ .

**Punti di non derivabilità di  $F$ :** Come già notato, abbiamo  $F$  derivabile per  $x \neq -2, 0$ . Dai limiti di  $f$  per  $t \rightarrow -2^{\pm}, 0^{\pm}$  si trova che  $F$  ha un tangente verticale in  $x = -2$  ed un cuspidi in  $x = 0$ .

**Asintoti:** Come già notato ci sono asintoti orizzontali per  $x \rightarrow \pm\infty$  dove il segno  $L_+ > 0$  segue da  $F(1) = 0$  e  $F$  crescente per  $x > 0$ .

**Grafico qualitativo:** Da sinistra a destra,  $F$  parte da un asintoto orizzontale al  $-\infty$ , decresce fino al  $x = -3$  dove c'è un minimo locale con retta tangente orizzontale. Poi  $F$  cresce fino ad  $x = -1$  dove c'è un massimo locale con retta tangente orizzontale. Poi  $F$  decresce fino ad  $x = 0$  dove  $F(0) < 0$  e abbiamo un minimo locale con cuspidi. Infine  $F$  cresce con uno zero in  $x = 1$  ed un asintoto orizzontale a quota positiva per  $x \rightarrow +\infty$ .

## Esercizio 2.

(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n+1)^{\alpha}}^{n^{\alpha}} |x \log x| dx$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$  è una serie telescopica. Infatti,  $f$  definita da  $f(x) = |x \log x|$  è continua su  $(0, +\infty)$  dove  $n^{\alpha}, (n+1)^{\alpha} > 0$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ . Quindi  $f$

ammette primitiva  $F$  in  $(0, +\infty)$  e abbiamo

$$\int_{(n+1)^\alpha}^{n^\alpha} f(x) dx = F(n^\alpha) - F((n+1)^\alpha) := b_n - b_{n+1}.$$

Quindi la serie è convergente se e solo se esiste finito il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n^\alpha)$  con somma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = F(1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n^\alpha) \quad (1)$$

Dividiamo l'analisi in tre casi ( $\alpha = 0, \alpha > 0, \alpha < 0$ ). Per  $\alpha = 0$  si ha  $n^\alpha = (n+1)^\alpha = 1$  per ogni  $n$  e tutti i termini si annullano. Quindi

$$\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 0.$$

Per  $\alpha > 0$  abbiamo  $n^\alpha, (n+1)^\alpha \in [1, \infty)$  e una primitiva di  $f(x) = x \log x$  è

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2. \quad (2)$$

Inserendo (2) nella formula (1) abbiamo (per  $\alpha > 0$ ):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{1}{4} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2}n^{2\alpha} \left( \alpha \log n - \frac{1}{2} \right) \right] = -\infty$$

e la serie diverge a  $-\infty$ .

Per  $\alpha < 0$  abbiamo  $n^\alpha, (n+1)^\alpha \in (0, 1]$  e una primitiva di  $f(x) = -x \log x$  è

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 \log x + \frac{1}{4}x^2. \quad (3)$$

Inserendo (3) nella formula (1) abbiamo (per  $\alpha < 0$ ):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{4} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2}n^{2\alpha} \left( \frac{1}{2} - \alpha \log n \right) \right] = \frac{1}{4}$$

e la serie converge con somma  $1/4$ .

(b) La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \left[ \operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sin \left( \frac{1}{2n} \right) - 1 \right]^\alpha$$

risulta essere a termini positivi: possiamo usare il confronto asintotico per determinare per quali  $\alpha$  sia convergente. Consideriamo il termine generale

$$a_n = n^2 \left[ \operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sin \left( \frac{1}{2n} \right) - 1 \right]^\alpha$$

per  $n \rightarrow +\infty$ , usando gli sviluppi delle funzioni seno e coseno iperbolico risulta

$$n^2 \left[ \operatorname{Ch} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sin \left( \frac{1}{2n} \right) - 1 \right]^\alpha = n^2 \left[ \frac{1}{4!n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^\alpha \sim \frac{1}{(4!)^\alpha n^{2\alpha-2}}$$

perciò la serie considerata converge se e solo se  $2\alpha - 2 > 1$  e cioè se e solo se  $\alpha > 3/2$

### Esercizio 3.

(a)(i) Osserviamo che in un intorno di  $(1, 0)$  la funzione

$$f(x, y) = y^2 + e(y - x) + \int_{x-y}^{(x-y)^2} e^{\sqrt{t}} dt$$

è composizione di funzioni di classe  $C^2$ . Per scrivere la formula di Taylor del secondo ordine centrata nel punto  $(1, 0)$  di  $f$  abbiamo bisogno di determinare  $f(1, 0)$ ,  $f_x(1, 0)$ ,  $f_y(1, 0)$ ,  $f_{xx}(1, 0)$ ,  $f_{xy}(1, 0)$ ,  $f_{yy}(1, 0)$ .

$$f(1, 0) = -e + \int_1^1 e^{\sqrt{t}} dt = -e$$

Calcoliamo le derivate prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e + 2(x - y)e^{x-y} - e^{\sqrt{x-y}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e - 2(x - y)e^{x-y} + e^{\sqrt{x-y}} + 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$$

...e le derivate seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(x - y)e^{x-y} + 2e^{x-y} - \frac{e^{\sqrt{x-y}}}{2\sqrt{x-y}} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = \frac{7}{2}e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2(x - y)e^{x-y} - 2e^{x-y} + \frac{e^{\sqrt{x-y}}}{2\sqrt{x-y}} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = -\frac{7}{2}e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x - y)e^{x-y} + 2e^{x-y} - \frac{e^{\sqrt{x-y}}}{2\sqrt{x-y}} + 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = \frac{7}{2}e + 2$$

La formula di Taylor richiesta sarà data da

$$f(x, y) = -e + \frac{7}{4}e(x - 1)^2 - \frac{7}{2}e(x - 1)y + \left(\frac{7}{4}e + 1\right)y^2 + o((x - 1)^2 + y^2)$$

(a)(ii) Da quanto trovato al punto precedente abbiamo che  $(1, 0)$  è un punto stazionario per  $f$ . Inoltre il determinante della matrice Hessiana di  $f$  è dato da  $7e > 0$  e  $f_{xx}(1, 0) = \frac{7}{2}e > 0$  da cui si deduce che  $(1, 0)$  è un punto di minimo.

(b) Studiare al variare di  $\alpha > 0$  la continuità, e la differenziabilità della seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha \sin y}{x^4 + y^2} & (x, y) \in B_1 \setminus (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dove  $B_1 = B_1(0, 0)$  è la palla aperta in  $\mathbb{R}^2$  di raggio 1 e centro  $(0, 0)$ .

**Continuità:**

Osserviamo che la funzione è sicuramente ben definita e continua in tutti i punti di  $B_1 \setminus \{(0, 0)\}$  per ogni  $\alpha > 0$ .

Per determinare per quali  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  risulta continua anche nell'origine, cominciamo ad eliminare qualche caso in cui le cose vanno male e valutando la funzione lungo la curva  $(x, x^2)$

$$f(x, x^2) = \frac{|x|^\alpha x^2}{2x^4} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

Quindi condizione necessaria affinché  $f$  sia continua è che  $\alpha > 2$ .

Poniamo  $\alpha = 2 + \epsilon$  con  $\epsilon > 0$ .

Usando la solita maggiorazione  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , si può stimare  $f$  nel modo seguente

$$0 \leq \left| \frac{|x|^{2+\epsilon} \sin y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^{2+\epsilon} |y|}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2} \frac{x^4 + y^2}{x^4 + y^2} |x|^\epsilon = |x|^\epsilon \rightarrow 0 \text{ per } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

quindi per  $\alpha > 2$   $f$  risulta continua in  $(0, 0)$ .

**Differenziabilità:**

Per ogni  $\alpha > 0$ , la funzione risulta differenziabile sicuramente in tutti punti di  $B_1 \setminus \{(0, y_0)\}$

Per i punti della forma  $(0, y_0)$  con  $|y_0| < 1$ , dividiamo l'analisi in due casi  $y_0 = 0$  e  $y_0 \neq 0$ .

**Caso 1:** ( $y_0 = 0$ ) Dobbiamo restringerci ad  $\alpha > 2$  perchè continuità è condizione necessaria per la differenziabilità. Essendo  $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$  per ogni  $x, y \in (-1, 1)$ , abbiamo che esiste il gradiente nell'origine e vale

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0).$$

Per la differenziabilità ci serve controllare che

$$f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle = o(\|(x, y)\|) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Ma  $f(0, 0) = 0$  e  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$  perciò ci serve

$$0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|x|^\alpha \sin y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Cominciamo di nuovo valutando lungo la curva  $(x, x^2)$  e si trova

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|^\alpha \sin x^2}{2|x|^5 \sqrt{1 + x^2}}$$

che tende a zero se e solo se  $\alpha > 3$ . Quindi per la differenziabilità di  $f$  in  $(0, 0)$  è necessario  $\alpha > 3$ .

Inoltre se  $\alpha = 3 + \epsilon > 3$  abbiamo

$$\frac{|x|^{3+\epsilon} |\sin y|}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x|^{3+\epsilon} |y|}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{|x|^{1+\epsilon} |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} |x|^\epsilon \rightarrow 0$$

perciò  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$  se e solo se  $\alpha > 3$ .

**Caso 2:** ( $y_0 \neq 0, |y_0| < 1$ ). Dobbiamo controllare per quali  $\alpha$  è vero che

$$\frac{f(x, y) - f(0, y_0) - \langle \nabla f(0, y_0), (x, y - y_0) \rangle}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (0, y_0). \quad (4)$$

In particolare dobbiamo prima avere l'esistenza del gradiente nel punto  $(0, y_0)$ . È chiaro che  $f_y(0, y_0) = 0$  ma la derivata parziale in  $x$  esiste se e solo se  $\alpha > 1$ . Infatti

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^\alpha \sin(y_0)}{t(t^4 + y_0^2)}$$

perciò il limite esiste finito se e solo se  $\alpha > 1$  e la derivata parziale vale zero in tal caso. Per  $\alpha \in (0, 1]$  la funzione  $f$  non è differenziabile in nessun punto della forma  $(0, y_0)$ .

Analizziamo il caso  $\alpha > 1$ . Abbiamo  $\nabla f(0, y_0) = (0, 0)$  e  $f(0, y_0) = 0$ . Quindi l'espressione in (4) può essere stimata facilmente da

$$\left| \frac{|x|^\alpha \sin y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \right| = \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \frac{|\sin y|}{(x^4 + y^2)} \leq \left| \frac{1}{|y|} \right| |x|^{\alpha-1}$$

che tende a zero per  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$  con  $y_0 \neq 0$  se  $\alpha > 1$ . Quindi  $f$  è differenziabile in  $(0, y_0)$  con  $y_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$  per ogni  $\alpha > 1$ .

**Esercizio 4.**

(a) Dato il problema di Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = -\frac{e^x}{e^{2x} + 1}y + e^{\arctan(e^x)}y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

l'equazione differenziale è in forma normale  $y' = f(x, y)$  dove

$f(x, y) = -\frac{e^x}{e^{2x} + 1}y + e^{\arctan(e^x)}y^2$  è di classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$  e quindi per ogni  $y_0$  esiste ed è unica la soluzione locale del Problema di Cauchy.

(b) Notiamo che l'equazione differenziale è di Bernoulli. Per  $y_0 = 0$  la soluzione è data da  $y = 0$ . Per  $y_0 \neq 0$  dividendo per  $y^2$  e operando il cambiamento di variabile  $z = \frac{1}{y}$ , si ottiene il nuovo problema

$$(NPC) \begin{cases} z' = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}z - e^{\arctan(e^x)} \\ z(0) = 1/y_0 \end{cases},$$

Risulta

$$z(x) = e^{\int_0^x \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt} \left\{ -\int_0^x e^{-\int_0^t \frac{e^s}{e^{2s} + 1} ds} e^{\arctan(e^t)} dt + \frac{1}{y_0} \right\}$$

da cui

$$z(x) = e^{\arctan(e^x)} \left\{ -x + \frac{1}{y_0 e^{\frac{\pi}{4}}} \right\}$$

Perciò la soluzione è data da

$$y(x) = e^{-\arctan(e^x)} \frac{y_0 e^{\frac{\pi}{4}}}{1 - x y_0 e^{\frac{\pi}{4}}}.$$

L'intervallo massimale di esistenza è dato da

$(-\infty, +\infty)$  se  $y_0 = 0$

$\left(-\infty, \frac{1}{y_0 e^{\frac{\pi}{4}}}\right)$  se  $y_0 > 0$

e da  $\left(\frac{1}{y_0 e^{\frac{\pi}{4}}}, +\infty\right)$  se  $y_0 < 0$ .