

Risposte alla Prova Scritta di Analisi Matematica II - 30/01/09

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne e Dott. M. Calanchi, C. Tarsi e L. Vesely

Esercizio 1.

1a. Primitive di f in I esistono perchè f è continua su I (Teorema Fondamentale del Calcolo integrale).
Tale primitive sono

$$F(x) = C + \begin{cases} e \log x & 0 < x \leq e \\ x \log x - x + e & e \leq x < +\infty \end{cases}$$

con $C \in \mathbf{R}$ arbitrario.

1b.

Dominio di F : Usando gli sviluppi asintotici di f si trova $D(F) = (-1, +\infty)$.

Limiti al bordo del dominio: Usando gli sviluppi asintotici di f più la monotonia di F (segno di f) si trova $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$ finito e positivo e $\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = +\infty$.

Monotonia ed estremi locali: Usando il segno di f si trova: F è crescente per $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{N}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

ed è decrescente per $x \in (-1, 0] \bigcup_{k \in \mathbf{N}} [(2k+1)\pi, 2k\pi]$. C'è un minimo locale (e globale) in $x = 0$, minimi

locali in $x = 2k\pi, k \in \mathbf{N}^+$, e massimi locali in $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{N}$.

Punti di non derivabilità: Si trova F è derivabile per ogni $x \in (-1, +\infty) \setminus \{1\}$ e F ha un tangente verticale in $x = 1$.

Asintoti: Abbiamo un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ ed un asintoto verticale in $x = -1$ (agli estremi del dominio di definizione).

Segno: Si ha $F(0) = 0$ e $F(x) > 0$ per ogni $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

N.B. Per l'analisi del segno ed il comportamento del grafico attorno l'asintoto orizzontale, si può notare che $F(+\infty)$ è la somma di una serie convergente con termini $(-1)^j a_j$ dove $a_j > 0$, decrescente e tende ad zero (criterio di Leibniz).

Esercizio 2.

La serie è regolare (termini positivi). Via confronto asintotico si trova che la serie converge (assolutamente) se e solo se $|a| > 2$. La serie diverge (a $+\infty$) per $|a| \leq 2$.

Esercizio 3.**3a.**

Continuità: f è continua su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ per ogni $a > 0$. Nell'origine f è continua per ogni $a > 2$ e discontinua per $a \in (0, 2]$.

Derivabilità direzionale:

- Per ogni $a > 0$, La funzione è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus E)$ con $E = \{(x, y) : x = 0\}$ e, quindi derivabile in ogni direzione.
- Su E , la funzione è nulla e quindi $f_y(0, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbf{R}$ e per ogni $a > 0$.
- Su $E \setminus \{(0,0), (0,1)\}$ e per ogni direzione $v \neq (0,1)$ esiste (ed è zero) $D_v(0, y)$ se e solo se $a > 1$.
- Nel punto $(0, 1)$, si ha $D_v(0, 1) = 0$ per ogni $a > 0$.
- Nel punto $(0, 0)$, si ha $D_v(0, 0)$ esiste ed è nulla se e solo se $v_1 = 0$ (come già notato) oppure $a > 3$

Differenziabilità:

- Per ogni $a > 0$, La funzione è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus E)$ con $E = \{(x, y) : x = 0\}$ e, quindi differenziabile su $\mathbf{R}^2 \setminus E$.
- Su $E \setminus \{(0,0), (0,1)\}$, f non è derivabile in ogni direzione nel caso $a \in (0, 1]$. Quindi, non è differenziabile per $a \leq 1$. Invece, se $a > 1$ la funzione è di classe C^1 e, quindi, differenziabile.
- Nel punto $(1, 0)$, la funzione è differenziabile per ogni $a > 0$.
- Nel punto $(0, 0)$, la funzione è differenziabile se e solo se $a > 3$.

3b. Si ha $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ con $\nabla f(1, 2) = (0, 0)$ per ogni $b \in \mathbf{R}$. Calcolando la matrice hessiana $H_f(1, 2)$, si trova minimi locali nel caso $b \geq 1$, massimi locali nel caso $b \leq -1$, selle nel caso $b \in (-1, 1)$.

Esercizio 4.

L'equazione è di variabili separabili e non ci sono soluzioni d'equilibrio. Integrando e risolvendo per y si trova

$$y(x) = -\sqrt{2(1+x)^4 e^{x^2-2x} - 1}.$$

Analizzando il segno della espressione sotto la radice, si trova che il dominio massimale è $(\alpha, +\infty)$ con $\alpha \in (-1, 0)$ l'unica soluzione in $(-1, +\infty)$ dell'equazione $2e^{x^2-2x} = (1+x)^{-4}$