

SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA II - 10/02/2010

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, C. Tarsi, M. Calanchi

N.B. Sono concesse **DUE ORE** per la risoluzione degli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari

Esercizio 1. Sia $F(x)$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{\frac{t}{t-2}} - 1}{|t|\sqrt{t+3}} dt$$

dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio. Svolgere uno studio qualitativo di $F(x)$ (non è richiesto lo studio della convessità).

Esercizio 2. Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$,

dove

$$a_n = \left(n^{\frac{2}{\alpha}} + n^{\frac{\alpha}{2}} \right) \left[e^{n^{-\alpha} - n^{-2}} - \cos \left(\frac{1}{n^2} \right) \right], \quad \alpha > 0$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione due volte differenziabile in \mathbb{R}^2 tale che $(0, 0)$ è un punto stazionario per $f(x, y)$ e

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x, y) := f(x^2(y-1), y^2(x+1))$$

ammette in $(-1, 1)$ un punto di massimo relativo.

Esercizio 4. Considerare il seguente problema di Cauchy.

$$(PC) \begin{cases} y' = \frac{2y^2 - 4x^2}{xy} \\ y(2) = y_0 \end{cases}$$

- (a) Discutere brevemente esistenza ed unicità locale del problema.
- (b) Trovare la soluzione del problema di Cauchy al variare di $y_0 \neq 0$.