

SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA II - 19/06/2009

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, C. Tarsi, M. Calanchi

N.B. Sono concesse **TRE ORE e TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \log 3}{(1 + 2e^{-x}) \log(e^x + 2)}, & x \geq 0 \\ |x + \alpha|, & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare per quali valori del parametro α la funzione f ammette primitive su $(-1, 1)$ e calcolarle.
- (b) Per quali valori del parametro α la funzione risulta Riemann integrabile sull'intervallo $I = [-1, 1]$?

Esercizio 2. Sia $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ dove

$$f(t) = \frac{|t + 2|^{-2\alpha} \sin t}{|t^2 - t|^\alpha \arctan(t - 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio.

- (a) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il dominio di F .
- (b) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di F nel il punto $(-1, F(-1))$.

Esercizio 3. Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere delle seguenti

serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dove

(a) $a_n = \frac{\sin(n^\alpha)}{n^{\alpha^2+1} \arctan^2(n^{2\alpha+1})}$

(b) $a_n = \frac{n^2}{\sqrt{1 + n^{3\alpha}}} (\alpha - 3)^n$

Esercizio 4. Studiare, al variare di $\beta > 0$, continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{y+xy} - 1 - y}{(x^2 + y^2)^\beta} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 5. Trovare gli eventuali estremanti locali della funzione f definita da:

$$f(x, y) = \int_1^{x(y^3 + y^2) + 1} e^{t^2} dt.$$

Esercizio 6. Dopo aver discusso esistenza e unicità del seguente problema di Cauchy, trovarne la soluzione; determinare inoltre il più ampio intervallo di definizione della soluzione.

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x+2} + y^2 (2x+4) \log(x+2) \\ y(-1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$