

SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA II - 10/07/2009

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, C. Tarsi, M. Calanchi

**N.B.** Sono concesse **TRE ORE e TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari

**Esercizio 1.** Sia  $f : I = [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2-x}}{2+x} & 0 < x \leq 2 \\ 1-x^2 & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Mostrare che  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $I$  ma **non** ammette primitiva in  $I$ ;
- (b) Determinare il valor medio di  $f$  sull'intervallo  $I$ .

**Esercizio 2.** Sia  $F$  la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{t-2}{t+3} \arctan\left(\frac{1}{t+1}\right) dt$$

dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio. Svolgere uno studio qualitativo di  $F$  (insieme di definizione, limiti agli estremi del dominio, monotonia, estremi locali, punti di non derivabilità, asintoti, segno e grafico qualitativo).

**NON** è richiesto lo studio della convessità.

**Esercizio 3.** Studiare al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  il carattere delle seguenti

serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$  dove

(a)  $a_n = \frac{n^\alpha}{\log^\alpha n} \left\{ \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) - 3 \sin \frac{1}{n} + \frac{9}{2n^2} \right\}$

(b)  $a_n = \left( \frac{|n+\alpha|}{n-1} \right)^{\alpha n^2}$

**Esercizio 4.** Considerare la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = x|y|(y + x^2 + x)$$

- (a) Trovare gli eventuali estremanti locali di  $f$ .
- (b) Discutere la differenziabilità e la derivabilità direzionale di  $f$ .

**Esercizio 5.** Scrivere la formula di Taylor di ordine 2, con resto secondo Peano, centrata nel punto  $(1, 2)$  per la funzione definita da

$$f(x, y) = \int_{3x-y+1}^{x^2 y} \sqrt{\log t} dt.$$

**Esercizio 6.** Considerare il seguente problema di Cauchy.

$$(P) \begin{cases} y' = \frac{y}{x} \left( 1 + \frac{1}{\log(y/x)} \right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- (a) Per quali  $(x_0, y_0)$  ha senso studiare il problema? Per tali valori, discutere brevemente le questioni di esistenza ed unicità.
- (b) Nel caso  $x_0 = 1$ , trovare le soluzioni al variare dei valori ammissibili del parametro  $y_0$ .