

SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA II - 13/11/2009

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, C. Tarsi, M. Calanchi

N.B. Sono concesse **DUE ORE** per la risoluzione degli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari

Esercizio 1. Sia F la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_{-1/2}^x \frac{\arctan\left(\frac{1}{|t|^\alpha}\right) \log |t^2 - 1|}{|t^2 - t|^\alpha (t+2)^{1/3}} dt$$

Al variare del parametro $\alpha > 0$, determinare il dominio della funzione F , dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio.

Esercizio 2. Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^n \frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha \neq 1$$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = |x - y|(x^2 + y^2 - x - y)$$

- (a) Discutere la differenziabilità e la derivabilità direzionale di f .
- (b) Trovare gli eventuali estremanti locali di f .

Esercizio 4. Considerare il seguente problema di Cauchy.

$$(PC) \begin{cases} y' = \frac{y^2(5 - 2 \ln x)}{x^2} \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

- (a) Discutere brevemente l'esistenza ed unicità locale del problema.
- (b) Trovare la soluzione del problema di Cauchy al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di y_0 tali che l'insieme di definizione massimale I_0 della soluzione risulti essere illimitato.