SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA II - 10/09/2009

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, C. Tarsi, M. Calanchi

N.B. Sono concesse **TRE ORE** per la risoluzione degli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^{2x}+3}, & x \geq 0 \\ \\ |\alpha - x|, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare l'area della regione piana delimitata dalle rette $x = -1, x = 3, y = 0$ e dal grafico della funzione f.

(b) Determinare per quali valori di α la funzione f ammette primitiva su $[-1, 3]$.

Esercizio 2. Sia F la funzione definita da

$$F(x) = \int_{-3}^{x} \frac{(t+3)\log(1+2t^2)}{t^2(27-t^3)} dt$$

dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio. Svolgere uno studio qualitativo di F (insieme di definizione, limiti agli estremi del dominio, monotonia, estremi locali, punti di non derivabilità, asintoti e segno).
NON è richiesto lo studio della convessità.

Esercizio 3. Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della seguente serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dove

$$a_n = n^{2\alpha+1} \int_n^{2n} t^\alpha \arctan(1/t)\, dt$$

Esercizio 4. Discutere, al variare di $\alpha > 0$, la continuità e la differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = |x|^\alpha \log(1 + \sqrt{|xy|})$$

Esercizio 5. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(t) = f(t \,\arctan t, t + \cos \pi t),$$

dove $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = 2 \quad \text{e} \quad \nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = (1, 2).$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa $t_0 = 1$.

Esercizio 6. Dopo aver discusso esistenza e unicità del seguente problema di Cauchy, trovarne la soluzione; determinare inoltre il piú ampio intervallo di definizione della soluzione.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xe^{-y^2}}{y} \\ \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$