Soluzione della Prova Intermedia di Analisi Matematica II - 04/05/09

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. R. Payne, C. Tarsi e M. Calanchi

Esercizio 1.

1a. La funzione data

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x^\alpha} & x > 0 \\ \\ e^{x/2} - 2\alpha\cos x & x \leq 0 \end{cases}$$

è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Quindi, l'unico problema è in $x = 0$, ovvero per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso e limitato I per cui $0 \notin I$.

Invece, in un intorno di $x = 0$ abbiamo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 - 2\alpha \tag{1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases} \tag{2}$$

Quindi, f non è limitata in un intorno di $x = 0$ per $\alpha > 1$ e, quindi, non è integrabile secondo Riemann in I che continene $x = 0$. Invece, per $\alpha \leq 1$, f risulta continua in $I \setminus \{0\}$ e limitata, per cui $f \in \mathcal{R}(I)$ per ogni I chiuso e limitato.

1b. Sappiamo che se f è continua in $\mathbb{R}$ allora f ammette primitiva in $\mathbb{R}$. Basta controllare la continuità in $x = 0$, dove si trova da (1) e (2) che f è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1/2$.

Quindi, abbiamo una primitiva se $\alpha = 1/2$. D'altra parte, se $\alpha \neq 1/2$ la funzione f non soddisfa la proprietà di Darboux in nessun intervallo della forma $[-a, a]$ con $a > 0$ e piccolo. Infatti, nel caso $\alpha > 1$ a sinistra la funzione prende solo valori vicino a $1 - 2\alpha$ ma a destra i valori sono tutti più grandi di una qualsiasi numero $M > 0$ per a abbastanza piccolo. Invece, se $\alpha \in (-\infty, 1/2) \cup (1/2, 1]$ f ha salto in $x = 0$. Quindi, f non ammette primitiva per $\alpha \neq 1/2$.

1c. Per trovare le primitive quando $\alpha = 1/2$ abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ \\ e^{x/2} - \cos x & x \leq 0 \end{cases}$$

e integrando a pezzi (via la sostituzione $u = \sqrt{x}$ ed integrazione per parti per $x > 0$) abbiamo delle primitive

$$F(x) = \begin{cases} 2\left[\sqrt{x}\log(1+x) - 2\sqrt{x} + 2\arctan(\sqrt{x})\right] + C_1 & x > 0 \\ \\ 2e^{x/2} - \sin x + C_2 & x < 0 \end{cases}$$

dove $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti di integrazione. Ci serve F almeno continua in $x = 0$ (per essere derivabile), quindi calcolando i limiti per $x \to \pm 0$ ci serve

$$C_1 = F(0^+) = F(0^-) = 2 + C_2.$$

Quindi, $C_2 = C_1 - 2$, ovvero

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} 2\left[\sqrt{x}\log(1+x) - 2\sqrt{x} + 2\arctan(\sqrt{x})\right] & x > 0 \\ \\ 2e^{x/2} - \sin x - 2 & x \leq 0 \end{cases} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.

Vogliamo analizzare la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ con

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+2}}\arctan\left(\frac{t}{t-2}\right)$$

Dominio di F: Abbiamo che f è definita e continua per $t \in (-2, +\infty) \setminus \{2\}$. Quindi, f è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo in $(-2, +\infty)$ che non contiene $t = 2$. Abbiamo allora

$$(-2, 2) \subset \mathrm{dom}(F) \quad \text{e} \quad F(0) = 0.$$

Nei punti "problematici" $x = -2, 2$ ci servono degli sviluppi asintotici per f. Per $t \to -2^+$ si trova

$$f(t) \sim \arctan(1/2)\frac{1}{(t+2)^{1/2}} \quad \text{per} \quad t \to -2^+.$$

Quindi f è integrabile in senso generalizzato in un intorno destro $\mathcal{U}^+(-2)$ di $t = -2$ e si ha

$$[-2, 2) \subset \mathrm{dom}\,(F) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2^+} F(x) = F(-2), \quad \text{finito}.$$

Per $t \to 2^\pm$, si ha $t/(t-2) \to \pm\infty$ e si trova

$$f(t) \sim \pm\frac{\pi}{4} \quad \text{per} \quad t \to 2^\pm.$$

Quindi f è limitata ed è integrabile secondo Riemann in un intorno $\mathcal{U}(2)$ di $t = 2$. Quindi abbiamo

$$\mathrm{dom}\,(F) = [-2, +\infty).$$

Limiti al bordo del dominio: La funzione integrale è continua su $[-2, +\infty)$ con limite finito $F(-2)$ per $x \to -2^+$ per la discussione sopra. Usando $F(0) = 0$ e la monotonia di F (il prossimo punto) si vede che

$$\lim_{x \to -2^+} F(x) = F(-2) < 0.$$

Per $x \to +\infty$, ci serve il comportamento asintotico di f

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4}\frac{1}{t^{1/2}}, \quad \text{per} \quad t \to +\infty \tag{3}$$

e quindi f non è integrabile in senso improprio all'infinito. Di nuovo, usando la monotonia si vede che

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

Monotonia ed estremi locali: Abbiamo già notato che F è continua su $[-2, +\infty)$. Inoltre, F sarà derivabile in ogni punto di continuità di f con derivata $F'(x) = f(x)$; cioè

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

Quindi, analizzando il segno di $F' = f$ per $x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ si trova che

$$\mathrm{sgn}\,(F'(x)) = \mathrm{sgn}\,(f(x)) = \mathrm{sgn}\,\left(\frac{x}{x-2}\right).$$

Quindi F è crescente per $x \in [-2, 0]$ e per $x \in [2, +\infty)$ e decrescente per $x \in [0, 2]$ con massimo locale in $x = 0$ e minimo locale in $x = 2$. Il massimo locale è sicuramente **non** globale dato che F tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

Punti di non derivabilità: Abbiamo F derivabile per ogni $x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. Nei punto "problematico" $x_{\mathrm{sing}} = 2$, abbiamo visto un salto per f, quindi c'è un punto angoloso per F in $x = 2$. Invece, per $x \to -2^+$, $F'(x) = f(x) \to +\infty$ e abbiamo un tangente verticale in $x = -2^+$.

Asintoti: Per quello che abbiamo già visto, non ci sono né asintoti verticali né asintoti orizzontali. All'infinito F tende a $+\infty$, e, sfruttando (3)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Quindi, non ci sono asintoti obliqui.

Segno: Abbiamo $F(0) = 0$, F strettamente crescente in $[-2, 0]$ e in $[2, +\infty)$, F strettamente decrescente in $[0, 2]$, e $F(-2^+) < 0$, $F(+\infty) = +\infty$. Quindi esiste un unico valore $\alpha \in (2, +\infty)$ per cui $F(\alpha) = 0$. Riassumendo

$$F(0) = 0 = F(\alpha) \quad \text{con} \quad \alpha \in (2, +\infty);$$

$$F(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in (\alpha, +\infty);$$

$$F(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in [-2, 0) \cup (0, \alpha).$$

Grafico: si trova mettendo insieme gli elementi sopra.

Esercizio 3.

3a. Consideriamo la serie con termine generale

$$a_n(\alpha) = \int_{n^\alpha}^{(n+1)^\alpha} f(t)\, dt = \int_{n^\alpha}^{(n+1)^\alpha} \frac{\arctan{(t)}}{t^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 0.$$

Per ogni $\alpha > 0$, è una serie a termini positivi e finiti dato che la funzione integranda f è positiva e continua su $[n^\alpha, (n+1)^\alpha]$. Quindi la serie è regolare (convergente o divergente a $+\infty$).

Per il teorema della media integrale, esiste una successione $\{t_n\}$ con $t_n \in (n^\alpha, (n+1)^\alpha)$ per cui

$$a_n = [(n+1)^\alpha - n^\alpha]\, f(t_n) = [(n+1)^\alpha - n^\alpha]\, \frac{\arctan{(t_n)}}{t_n^{\alpha-1}} \tag{4}$$

Da

$$n^\alpha < t_n < (n+1)^\alpha$$

segue che per $n \to +\infty$ si ha

$$\arctan{(t_n)} \sim \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

e

$$t_n^{\alpha-1} \sim n^{\alpha^2-\alpha}. \tag{6}$$

Infatti, la formula (5) è ovvia e per la (6) si può notare che

$$n^\alpha < t_n < (n+1)^\alpha = n^\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = n^\alpha \left[1 + o(1)\right].$$

Dividendo per n^α e usando il teorema dei due carabinieri da $t_n \sim n^\alpha$, e quindi la (6). Inoltre abbiamo, sempre per $n \to +\infty$,

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left[\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \sim \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \tag{7}$$

Combinando $(4), (5), (6)$ e (7) con la definizione di a_n abbiamo

$$a_n \sim \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{n^{(\alpha-1)^2}} \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Per il confronto asintotico, si vede che la serie è

$$\text{divergente a } +\infty \quad \text{per} \quad 0 < \alpha \le 2$$
$$\text{(assolutamente) convergente per} \quad \alpha > 2.$$

3b. Consideriamo la serie con termine generale

$$a_n(\alpha) = (\alpha^2 + 3\alpha + 1)^n n^{2\alpha+1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Innanzitutto, il carattere della serie dipende dal polinomio $p(\alpha) = \alpha^2 + 3\alpha + 1$. In particolare, per gli zeri di p ovvero per $\alpha = (-3 \pm \sqrt{5})/2$, ogni $a_n = 0$ è la serie converge ad zero. Quando $p > 0$ ovvero per

$$\alpha \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right). \tag{8}$$

la serie ha termini positivi ed è regolare (convergente o divergente a $+\infty$). Invece, per gli altri valori di α, abbiamo alternazione nel segno di a_n.

Inoltre, è chiaro che il fattore esponenziale $p(\alpha)^n$ è una progressione geometrica e pertanto è dominante rispetto al fattore polinomiale $n^{2\alpha+1}$ (se $|p(\alpha)| \neq 1$). Quindi ha senso pensare del criterio del rapporto applicato a

$$b_n = |a_n| = |p(\alpha)|^n n^{2\alpha+1}.$$

Si trova

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = |p(\alpha)| \left[\frac{n+1}{n}\right]^{2\alpha+1} \to |p(\alpha)|$$

e quindi si ha convergenza assoluta per $|p(\alpha)| = |\alpha^2 + 3\alpha + 1| < 1$. Risolvendo questa disuguaglianza si trova

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{è assolutamente convergente (AC)} \quad \text{per } \alpha \in (-3, -2) \cup (-1, 0).$$

Invece, se $|p(\alpha)| > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non è assolutamente convergente. Più precisamente, usando la regolarità (8) per $|\alpha|$ grande, abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è divergente (D) per } \alpha \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty).$$

Poi, per $p(\alpha) < -1$ abbiamo una serie irregolare, ovvero

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è irregolare (I) per } \alpha \in (-2, 1).$$

Rimane solo la convergenza nei valori rimanenti $\alpha = -3, -2, -1, 0$. Si ha

$$\alpha = -3: \quad a_n = n^{-5} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è (AC).}$$

$$\alpha = -2: \quad a_n = (-1)^n n^{-3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è (AC).}$$

$$\alpha = -1: \quad a_n = (-1)^n n^{-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è (CC) per il Criterio di Leibniz.}$$

$$\alpha = 0: \quad a_n = n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ è (D).}$$
