Risposte allo Prova Scritta di Analisi Matematica II - 13/11/09

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Proff. K. Payne, C. Tarsi, M. Calanchi

Esercizio 1.

(a) La funzione integranda $f(t)$ è continua per ogni $t \neq 0, \pm 1, -2$, pertanto $(-1, 0) \subset \mathrm{dom}(F)$. Inoltre

$$f(t) \sim C \log |t+1| \qquad t \to -1^{\pm}$$

e

$$f(t) \sim C(t+2)^{-1/3} \qquad t \to -2^{\pm}$$

da cui $(-\infty, 0) \subset \mathrm{dom}(F)$. Analizzando il comportamento asintotico di f in un intorno di $t = 0$ e in un intorno di $t = 1$ si ottiene, rispettivamente

$$f(t) \sim C \frac{t^2}{|t|^{\alpha}} \qquad t \to 0^{\pm},$$

integrabile in senso generalizzato in $\mathcal{U}(0)$ se e solo se $\alpha < 3$, e

$$f(t) \sim C \frac{\log |t-1|}{|t-1|^{\alpha}} \qquad t \to 1^{\pm}$$

integrabile in senso generalizzato in $\mathcal{U}(1)$ se e solo se $\alpha < 1$. Riassumendo,

$$\mathrm{dom}(F) = \begin{cases} (-\infty, 0), & \text{se } \alpha \geq 3 \\ (-\infty, 1), & \text{se } 1 \leq \alpha < 3 \\ (-\infty, +\infty), & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Esercizio 2.

Applicando, ad esempio, il criterio della radice, si ottiene

$$|a_n|^{1/n} \longrightarrow \left| \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right|$$

pertanto la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha < 0$. Per

$$\alpha > 1$$

la serie diverge, mentre per

$$0 < \alpha < 1$$

la serie oscilla. Infine, per $\alpha = 0$, la serie converge condizionatamente, grazie al criterio di Leibnitz.

Esercizio 3.

(a) La funzione è chiaramente continua e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$.
Per quanto riguarda la derivabilità direzionale di f, si ottiene:

- in $(0,0)$ e in $(1,1)$ la funzione f ammette tutte le derivate direzionali, e vale
$$D_v f(0,0) = D_v f(1,1) = 0 \qquad \forall\ v = (v_1, v_2) \text{ t.c. } v_1^2 + v_2^2 = 1$$
- per ogni $(x_0, x_0) \neq (0,0), (1,1)$ la funzione f ammette derivata direzionale solo lungo le direzioni $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e lungo tali direzioni si ha $D_{\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} f(x_0, x_0) = 0$

Per quanto riguarda la differenziabilità, f non è differenziabile nei punti (x_0, x_0) con $x_0 \neq 0, 1$. Nei punti $(0,0), (1,1)$ si verifica mediante definizione che f è differenziabile.

(b) Nei punti di $E = \{(x_0, x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$ (dove f si annulla), analizzando il segno di f si ottiene
$$\begin{aligned}
&x_0 < 0 \quad \cup \quad x_0 > 1 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, x_0) \text{ minimo locale}\\
&0 < x_0 < 1 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, x_0) \text{ massimo locale}\\
&(0,0) \text{ e } (1,1) \quad \text{punti di sella}
\end{aligned}$$

I punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2 \setminus E$ sono $P_1 = (\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$ e $P_2 = (\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6})$ Osservando che f è simmetrica rispetto alla bisettrice del I-III quadrante, e applicando il teorema di Weierstrass ai compatti delimitati dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x - y = 0$ e dalla retta $x = y$ si ottiene che P_1 e P_2 sono entrambi punti di minimo locale.

Esercizio 4.

(a) L'equazione differenziale è in forma normale $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) = y^2(5 - 2\log x)/x^2$ definita e di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x > 0\}$. Quindi esiste ed è unica la soluzione locale per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

(b) L'equazione è a variabili separabili. Si noti che per $y_0 = 0$ la soluzione è identicamente nulla (ed il suo intervallo di definizione massimale è $(0, +\infty)$), mentre per $y_0 > 0$ si ha $y(x) > 0$ per ogni x in cui la soluzione è definita, e per $y_0 < 0$ si ha $y(x) < 0$ per ogni x in cui la soluzione è definita. Integrando e usando la condizione iniziale si trova la soluzione
$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - 3 + \frac{3 - 2\log x}{x}} = \frac{x}{(\frac{1}{y_0} - 3)x + 3 - 2\log x}.$$
La soluzione è ben definita se il denominatore $\frac{1}{y_0} - 3 + \frac{3-2\log x}{x}$ non si annulla. Pertanto, l'intervallo di definizione massimale I_0 può essere determinato studiando la condizione
$$\frac{3 - 2\log x}{x} \neq 3 - \frac{1}{y_0}$$
Studiando la funzione $\varphi(x) = \frac{3-2\log x}{x}$ si ottiene che l'intervallo di definizione massimale è illimitato se e solo se $y_0 < \frac{1}{3+2e^{-5/2}}$.