Risposte alla Prova Scritta di Analisi Matematica II - 14/09/07

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne e Dott. L. Vesely

Esercizio 1.

1a. Primitive di f in I esistono perchè f è continua su I (Teorema Fondamentale del Calcolo integrale). Tale primitive sono

$$F(x) = C + \begin{cases} -\log(\cos x) & -\pi/4 \leq x < 0 \\ -x\cos x + \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

con $C \in \mathbf{R}$ arbitrario. Per il valor medio di f su I si può usare F sopra per trovare

$$\bar{f}_{|I} = \frac{4}{5\pi}\left(\pi + \log(\sqrt{2}/2)\right).$$

1b.

Dominio di F: Usando gli sviluppi asintotici di f si trova $D(F) = (-3, +\infty)$.

Limiti al bordo del dominio: Usando gli sviluppi asintotici di f più la monotonia di F (segno di f) si trova $\lim_{x\to+\infty} = L$ finito (ma senza un controllo facile sul segno del limite) e $\lim_{x\to-3^+} F(x) = -\infty$.

Monotonia ed estremi locali: Usando il segno di f si trova: F è crescente per $x \in (-3, 0] \cup [2, +\infty)$ ed è decrescente per $x \in [0, 2]$. C'è un massimo locale in $x = 0$ ed un minimo locale in $x = 2$.

Punti di non derivabilità: Si trova F è derivabile per ogni $x(-3, +\infty) \setminus \{0, 2\}$ e F ha un cuspide in $x = 0, 2$.

Asintoti: Abbiamo un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ ed un asintoto verticale in $x = -3$ (agli estremi del dominio di definizione).

Segno: Si trova

$$F(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in (-3, \alpha) \cup (1, \beta)$$
$$F(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in (\alpha, 1) \cup (\beta, +\infty)$$

dove $\alpha \in (-3, 0)$ e $\beta > 2$ potrebbe essere infinito.

Esercizio 2.

2a. Via confronto asintotico si trova che la serie converge (assolutamente). Usando la procedura come quella per la serie di Mengoli, si trova che la somma cale $1/2$.

2b. Analizzando la serie come somma di sue serie (spezzando i due termini) si trova che la serie è:

$$\text{convergente} \Leftrightarrow \alpha \in (-1, -1/2);$$
$$\text{divergente a } -\infty \Leftrightarrow \alpha \in [-1/2, 0);$$
$$\text{divergente a } +\infty \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty).$$

Esercizio 3.

3a. Sfruttando la regola della catena (due volte) si trova $\nabla f(0,0) = (1,1)$.

3b. Si ha f è di classe C^∞ sull'insieme aperto $\mathbf{R}^2 \setminus E$ (dove E è chiuso) e anche sul'interno E°. Quindi f è continua, derivabile in ogni direzione, differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \partial E$. Invece su $\partial E \setminus \{(0,0)\}$ si trova che f non è continua nè derivabile in x, y e, quindi, non differenziabile. Invece f è continua, derivabile, differenziabile nell'origine $(0,0)$.

Esercizio 4.

4a. Applicando il teorema di esistenza ed unicità locale, si vede che esiste un'unica soluzione del problema. L'equazione e di variabili separabili e si trova

$$y(x) = \left[\log\left(2 + e^4 - 2e^{-x}\right)\right]^{1/2}.$$

Il dominio massimale segue dal bisogno di avere $2 + e^4 - 2e^{-x} > 1$ da cui

$$x \in \left(-\log\left(\frac{1+e^4}{2}\right), +\infty\right).$$

4b. Scrivendo la soluzione generale nella forma $y(x;\lambda) = C_1 y_1(x;\lambda) + C_2 y_2(x;\lambda)$ ed analizzando le varie casi in base di λ, si trova che $\lambda = \dfrac{9+4n^2}{4}$ con $n \in \mathbf{N}$.