

SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 2 (6cfu)- 17/06/2016

C.L. in Matematica

Proff. K. Payne, M. Calanchi e E. Terraneo

N.B. Sono concesse **TRE ORE** per la risoluzione degli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari tranne il foglio di Sviluppi Notevoli di Analisi Matematica 1.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log^2 x & x > 1 \\ 1 - x & x \leq 1 \end{cases}$$

- a) Stabilire se f ammette primitiva su tutto \mathbb{R} e in caso affermativo determinare la primitiva che si annulla in $x = -1$.
- b) Determinare la media integrale di f su $[0, 2]$.

Esercizio 2. Sia F la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

dove

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \log t}{(t^2 + 1) \sqrt{|t - 3|}} & t > 0, t \neq 3 \\ 0 & t = 3 \\ te^t & t \leq 0 \end{cases}$$

e l'integrale è da intendersi eventualmente in senso generalizzato.

Svolgere uno studio qualitativo di F (insieme di definizione, continuità e derivabilità, asintoti, monotonia, estremi locali, segno e grafico qualitativo).

Esercizio 3. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y| + 2x}{x^2 + y^2} (x^2 - x) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Studiare continuità e differenziabilità di f nel suo dominio.

Esercizio 4. Discutere la natura dei punti stazionari per la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 + yz + z^3.$$

Esercizio 5. Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 6, |z| \geq x^2 + y^2\}.$$

Bonus. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}.$$

Determinare i valori di $\alpha > 0$ per cui f_α risulta integrabile in senso improprio sulla bolla unitaria $\Omega = B_1(0)$. Ripetere per $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$.