PROVA SCRITTA DI ANALISI II – 21/09/2000

Allievi Ingegneri Aerospaziali

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Sia data $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$.

a. Dare la definizione di punto di massimo e minimo locale e globale per f, nonché di punto di sella. Enunciare delle condizioni sufficienti perché un punto sia un minimo o massimo locale oppure una sella.

b. Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = y(e^x - 1)$$

si determino i punti critici di f e se ne discuta la natura locale.

c. Determinare il massimo e minimo di f sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

Suggerimento: Si tenga presente l'orientazione del gradiente nelle varie regioni del piano.

Esercizio 2.

a. Enunciare il Teorema di Gauss-Green nel piano ed il Teorema della divergenza nello spazio.

b. Siano $\mathbf{G} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{G}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (2x + e^x, x + y^2)$$

e γ la curva definita da

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

calcolare il lavoro effettuato da $\mathbf{G}$ lungo γ percorsa in senso antiorario.

c. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ uscente dal bordo $\Sigma = \partial\Omega$ del dominio Ω definita da

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 4, \ 0 < z < 2\}.$$

Esercizio 3

a. Definire la convergenza puntuale/uniforme per una succesione di funzioni $\{f_n(x) : x \in A\}$ dove $A \subseteq \mathbf{R}$.

b. Data la succesione di funzioni

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in \mathbf{R}$$

determinarne l'insieme di convergenza puntuale ed quello di convergenza uniforme.

c. Analizzare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x - 9)^n}{2n + 1}$$

Esercizio 4.

a. Considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (t - 2)(y + 1) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

Discutere l'esistenza ed unicità locale per questo problema in dipendenza dal dato iniziale $y_0 \in \mathbf{R}$. Discutere l'esistenza globale.

b. Risolvere il problema (PC) per ogni ammissiblile condizione iniziale y_0.

c. Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (PC), in dipendenza dal dato iniziale.

N.B. Sono concesse **TRE ORE E TRENTA MINUTI** per la risoluzione dei quattro esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.
Passati **5 minuti** dall'inizio della prova **NON** è consentito ritirarsi.