Riassunto delle Esercitazioni di Analisi Matematica II

C.d.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni - A. A. 2006-2007

Prof. Kevin R. Payne e Dott. Libor Vesely

1 Serie Numeriche - Mer. 28 marzo - due ore

1.1 Calcolo della somma di una serie

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(3^{1/(2n-1)} - 3^{1/(2n+1)}\right), \sum_{n=1}^{+\infty} \left(3^{-(2n-1)} - 3^{-(2n+1)}\right).$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (b_{n+2} - b_n)$ con $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (|x| - 1)^n$ con $x \in \mathbf{R}$.

1.2 Condizione necessaria e criteri di confronto:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^3+2}{n^2+3}\right), \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (\log n)^{-\log n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n+1}}$

1.3 Criterio del rapporto/ della radice

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ con $x \in \mathbf{R}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\pi/2)^n}{n+3^{-n}}$

1.4 Serie con parametro

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+3}{2n+5}\right)^a \qquad \text{con } a \in \mathbf{R}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{a}+3}{2a+5}\right)^n \qquad \text{con } a \geq 0$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \left(\int_{n^3}^{n^3+1} \frac{3+\cos t}{1+\sqrt{t}}\, dt\right) \qquad \text{con } a \in \mathbf{R}$

1.5 Proposte

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^{\log n}}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n^2}{n+3^{n-1}}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}}{n}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n^3+4n}-1\right)\frac{n}{1+\log n}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}-1\right)$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(n+2)^{\alpha n}}\quad$ con $\alpha>0$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{\alpha}}{\beta^{n}}\quad$ con $\alpha\in\mathbf{R},\beta>0$

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}(\log(\log n))^{\gamma}}\quad$ con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx\right)$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{n^2}^{n^3}\sin^2(1/x)\,dx\right)$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{1+\frac{1}{n+1}}^{1+\frac{1}{n}}(x^a-1)^{-1/2}\,dx\right)\quad$ con $a>0$

2 Serie Numeriche - Lun. 03 aprile - due ore

2.1 Convergenza assoluta e condizionale

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\quad$ con $\displaystyle a_n=\frac{1}{n+\cos^2 n}$ per $n=2k$ e $\displaystyle a_n=\frac{1}{n^2+1}$ per $n=2k+1$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+(-1)^n n^2}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1+e^{-n}\right)$

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha \sin(1/n)}$ con $\alpha \in \mathbf{R}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\log n} + \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 \right]$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-5)^n}{4^n \sqrt[3]{1+n^2}}$ con $x \in \mathbf{R}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$ con $x \in \mathbf{R}$

2.2 Serie con termini senza formule esplicite

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{1/n} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) dx \right)$
- Sia a_n definita per ricorrenza via

$$\begin{cases} a_1 = 3/2 \\ a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2} + a_n^2}{1 + a_n} \end{cases}$$

Mostrare che esiste finito $l = \lim_{n \to +\infty} a_n$ e studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - l)$

2.3 Proposte

- Sia a_n definita per ricorrenza via

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = x a_n^p \end{cases}$$

dove $x, p \in \mathbf{R}$. Trovare una delle formule esplicite per a_n (in base dei valori di x, p) e studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{a-1} f(1/\sqrt{n})$ dove $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \left(\sqrt{1+t} - e^t \right) dt.$
- Per le affermazioni seguenti, mostrare quelle vere e fornire un controesempio per quelle false.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$ $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge

3 Calcolo Differenziale - Mer. 23 maggio - due ore

3.1 Derivazione di funzioni composte

- Calcolare $\nabla F(0,1)$ se $F = f \circ g$ con $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ di classe C^1 e $g(s,t) = (s^2 - t^2, s/t, e^{st})$ sapendo che $\nabla f(-1,0,1) = (2,-3,4)$.

3.2 Derivazione di funzioni composte- equazioni alle derivate parziali

- Mostrare che **l'equazione del trasporto** ($(a,b) \in \mathbf{R}^2$):

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ \text{ in } \mathbf{R}^2$$

ha delle soluzioni $u(x,y) = f(bx - ay)$ con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile. Se u è differenziabile, mostrare che sono le uniche possibilità per $u = u(x,y)$.

- Trovare la soluzione $u = u(x,y)$ per il seguente **problema al contorno** per l'equazione del trasporto (**se** $b \neq 0$):

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \ \text{ in } \ \mathbf{R}^2 \\ \\ u(x,0) = x^2 \ \text{ per ogni } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

- **Proposta:** Mostrare che **l'equazione delle onde**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ in } \mathbf{R}^2$$

ha delle soluzioni $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$ con $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ due volte derivabili. Usare questo fatto di trovare la soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^2 \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

- Trovare l'equazione differenziale che deve essere soddisfata da $g = g(t)$ se $u(x) = g(||x||^2)$ risolve **l'equazione di Laplace**

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^n.$$

3.3 Funzioni di classe C^2 e differenziabilità del secondo ordine

- Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  a) Mostrare che $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$;

  b) Mostrare che $f \notin C^2(\mathbf{R}^2)$;

  c) f è due volte differenziabile in $(0,0)$? Vale una formula di Taylor del secondo ordine in $(0,0)$?

- **Proposta:** Mostrare che f è due volte differenziable in $(0,0)$, ma non è C^2 in $(0,0)$ se

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{7/2} \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- **Proposta:** Trovare $p > 0$ per cui che f è due volte differenziable in $(0,0)$, ma non è C^2 in $(0,0)$ se

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p \sin(1/(x^2+y^2)) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.4 La formula di Taylor del secondo ordine

- Trovare la formula di Taylor del secondo ordine centrato in $(0,0)$ con resto di Peano per $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y)$.

- Trovare la formula di Taylor del secondo ordine centrato in $(0,0,0)$ con resto di Peano per $f(x,y,z) = e^{2x+y+z^2} + \cos(3x + y^2 + z)$.

4 Estremi locali e globali - Ven. 25 maggio - due ore

4.1 Richiami teorici

- Il Teorema di Weierstrass per $f : K \subset \mathbf{R}^n \to R$ (f continua, K chiuso, limitato).
- Limiti per $||x|| \to +\infty$ di funzioni in $\mathbf{R}^n$

4.2 Estremi locali per funzioni regolari

Trovare gli estremanti locali per le seguente funzioni $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

- $f(x, y) = (y - 1)(y^2 - x^2)$
- $f(x, y) = y^2(\log^2(x) - 1)$
- **Proposta:** $f(x, y) = y(x^2 + 9y^2 - 1)$
- **Proposta:** $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (y - e^x)^2$
- $f(x, y) = xy \exp(-2x^2 - y^2)$ via limiti all'infinito più Weierstrass
- **Proposta:** $f(x, y) = (x^2y^2 - xy) \exp(-x^2 - y^2)$ via limiti all'infinito più Weierstrass

4.3 Estremi locali per funzioni irregolari

Trovare gli estremanti locali per le seguente funzioni $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

- $f(x, y) = x(x - y)^{2/3}$
- $f(x, y) = |x - 1|(x^2 - y^2)$
- **Proposta:** $f(x, y) = |y|(y - x(x - 1)e^x)$

4.4 Estremi locali per funzioni integrali

Trovare gli estremanti locali per le seguente funzioni integrali $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

- $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{xy^2} \frac{\arctan t}{t}\, dt$
- $f(x, y) = \displaystyle\int_1^{x^2y} \frac{e^{-t}}{t + 2}\, dt$
- **Proposta:** $f(x, y) = \displaystyle\int_{-x/y}^{y/x} \frac{t}{t - 1}\, dt$

5 Eq. Differenziali del 1^o ordine - Ven. 1 giugno - due ore

5.1 Equazioni di Bernoulli

- per gli esempi sotto, discutere brevemente la questione di esistenza ed unicità, trovare la soluzione (le soluzioni), e dove possibile gli intervalli massimali d'esistenza.

- Generalità sul metodo
- $y' = -3y/2x + \log x/y; \quad y(1) = 1$
- **Proposta:** $y' - y + xy^4; \quad y(0) = a \in \mathbf{R}$

5.2 Equazioni omogenee

- per gli esempi sotto, discutere brevemente la questione di esistenza ed unicità, trovare la soluzione (le soluzioni), e dove possibile gli intervalli massimali d'esistenza.

- Generalità sul metodo
- $y' = y/x + x/y; \quad y(2) = 4$
- $xy' = y(1 = \log y - \log x); \quad y(1) = e^a, \ a \in \mathbf{R}$
- **Proposta:** Per il problema $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1; \quad y(1) = y_0$

  a) Determinare per quali y_0 la soluzione ha la forma $y(x) = mx$ per $m \in \mathbf{R}$;

  b) Trovare le soluzioni per gli altri casi; (**avviso** l'esercizio non è difficile ma conviene scegliere una notazione compatta.

5.3 Equazioni a variabili separabili

- per gli esempi sotto, discutere brevemente la questione di esistenza ed unicità, trovare la soluzione (le soluzioni), e dove possibile gli intervalli massimali d'esistenza e uno breve studio qualitativo.

- Per il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = |y| \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
  Discutere brevemente la questione di esistenza ed unicità locale. Mostrare che $y \equiv 0$ è l'unica soluzione quando $y_0 = 0$ nonostante il fatto che $\partial f / \partial y$ **non** è continua in $(0, 0)$. Trovare le soluzioni in base al parametro y_0 e fare un breve studio qualitativo.
- **Proposta:** $y' = e^{x-y}; \quad y(0) = y_0$
- **Proposta:** $y' = \dfrac{(y^2 + 4)x \cos x}{2y}; \quad y(0) = -1.$ ([**Non** è richiesto uno studio qualitativo)

- **Proposta:** $y' = f(y);\quad y(0) = y_0 \in \mathbf{R}$ dove

$$f(y) = \begin{cases} y^2 & y \leq 0 \\ y^3 & y > 0 \end{cases}$$

5.4 Equazioni lineari

- per gli esempi sotto, discutere brevemente la questione di esistenza ed unicità, trovare la soluzione (le soluzioni), e dove possibile gli intervalli massimali d'esistenza.

- $y' = \max\{x^2 - y, x - y\};\quad y(0) = 0$. Si ricorda che $\max\{a, b\} = \dfrac{|a - b| + a + b}{2}$.
- **Proposta:** $y' + p(x)y = 2x;\quad y(2) = 1/2$ dove

$$p(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 1/x & x > 1 \end{cases}$$

6 Equazioni Differenziali - Mer. 6 giugno - due ore

6.1 Equazioni lineari non omogenee di ordine superiore

- Generalità sul metodo di variazioni delle costanti e la *matrice wronskiana*
- $y'' + y = 1;\quad y(0) = y_0,\quad y'(0) = y_1$
- $y'' + y = 1/\cos x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$
- **Proposta:** $y'' - 4y = 4/(1 + e^{4x});\quad y(0) = \pi/4,\quad y'(0) = -1$.
- Generalità sul metodo di "ispezione" - vedi le dispense di Salvatori-Vignati. Per l'equazione $L[y] = b$ sotto, trovare la soluzione generale come $y(x) = y_H(x) + y_N(x)$ con y_H la soluzione generale dell'equazione omogenea $L[y_H] = 0$ e y_N una soluzione particolare dell'equauazione non omogenea $L[y_N] = b$ seguendo il suggerimento sulla forma di y_N.
- **Proposta:** $y''' + 9y' = 2\cos x - \sin x;\quad y_N(x) = A\cos x + B\sin x$.
- **Proposta:** $y''' + y = x^3 - x;\quad y_N(x) = Q(x)$, un polinomio di grado 3.
- **Proposta:** $y'' - 3y' + 2y = 5e^x;\quad y_N(x) = Cxe^x$.
- **Proposta:** $y''' - 2y'' = 2e^x - 3x;\quad y_N(x) = x^2Q(x) + Ce^x$ dove $Q(x)$ ùn polinomio di grado 1.

6.2 Equazioni lineari con altre condizioni supplementari

- Discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzione del seguente *problema al contorno* al variare del parametro reale m
$$\begin{cases} y'' + my = 0, & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 = y(1) \end{cases}$$
N.B. La condizione al bordo si chiama la *condizione di Dirichlet.*

- **Proposta:** Discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzione del seguente problema al contorno al variare del parametro reale m
$$\begin{cases} y'' + my = 0, & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 = y(1) \end{cases}$$
N.B. La condizione al bordo si chiama la *condizione di Neumann.*

6.3 Equazioni lineari omogenee di ordine maggiore di due

- Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y''' - my'' + m^2y' - m^3y = 0$ con $m > 0$.
- **Proposta:** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y''' + (1-a)y'' + -ay' = 0$ con $a \in \mathbf{R}$.
- **Proposta:** Trovare la soluzione generale dell'equazione $y^(4) - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$. Poi scrivere il sistema lineare per le coefficienti nella soluzione generale che forniscono la soluzione del problema di Cauchy con data iniziale $(y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)) = (y_0, y_1, y_2, y_3)$.

6.4 Ripresa di esercizi proposti venerdì 1 giugno

- Trovare le soluzioni del problema $y' = e^{x-y}$; $y(0) = y_0$. Fare uno studio qualitativo incluso dominio massimale d'esistenza, monotonia, convessità, limiti al infinito e traccia del grafico delle soluzioni.
- Per il problema $y' + p(x)y = 2x$; $y(2) = 1/2$ dove
$$p(x) = \begin{cases} x & x \le 1 \\ 1/x & x > 1 \end{cases}$$
Trovare la soluzioni in due modi. Prima seguendo il metodo generale e poi risolvendo due problemi di Cauchy in successione.

7 Esercizi di Ricapitulazione - Ven. 6 giugno - due ore

7.1 Equazioni differenziali

- Ripresa del esercizio con $P(\lambda) = \lambda^3 - m\lambda^2 + m^2\lambda - m^3$ con $m > 0$.

- Trovare la soluzione generale $y = y(x)$ dell'equazione lineare omogenea di ordine 13
$$L[y] = D^3(D^2+1)^2(D^2+D+1)(D-3)(D-4)^3[y] = 0$$
dove D è l'operatore differenziale $D = \frac{d}{dx}$; cioè per l'equazione con polinomio caratteristico
$$P(\lambda) = \lambda^3(\lambda^2+1)^2(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-4)^3.$$

7.2 Limiti e Continuità

- Calcolare (se esistono) i limiti
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2-y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}.$$

- **Proposta:** Calcolare (se esistono) i limiti
$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}; \quad \lim_{(x,y)\to\infty} x^2 e^{x^2+y^2}.$$

- Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = e^x \sin(xy)$. Definiamo l'insime definito $A \subset \mathbf{R}^2$ via
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad 2 < f(x,y) < 4\right\}.$$
Decidere quale delle seguenti affermazioni siano vere: A è limitato, A è aperto, A è chiuso. Cosa sucedde se prendiamo invece
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad 2 \leq f(x,y) \leq 4\right\}?$$

7.3 Calcolo Differenziale

- Discutere la continuità, derivabilità direzionale, differenziabilità per le funzioni:
$$f(x,y) = |xy(x^2-y)|$$

- Siano $(u,v) = f(x,y) = (x^2\sin y, e^{xy})$ e $(s,t) = g(u,v) = (u^2+v^3, uv^2)$. Calcolare
$$\frac{\partial s}{\partial y}(x,y); \quad D(g\circ f)(x,y).$$

- Mostrare che l'equazione alle derivate parziali
$$\text{(EDP)} \quad yu_x - xu_y = 0$$
ammette soluzione $u = u(x,y)$ della forma $u = g(x/y)$ per $y \neq 0$ e $u = h(y/x)$ per $x \neq 0$ con g, h derivabili. Cosa dice allora l'equazione (EDP) sul comportamento di u?

- Trovare gli eventuali estremanti locali per le seguente funzioni
$$g(x,y) = (x^2-y^2)(x-2); \quad f(x,y) = (x^2y^2-xy)e^{-x^2-y^2}.$$