Corso di Laurea in Matematica

Esercizi di Analisi Matematica 2, A.A. 2015/2016

Esercizi con $*$

1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in \Omega$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Si assuma che f ammetta tutte le derivate direzionali nel punto x_0 e che $D_v(x_0)$ sia lineare in v, in particolare per ogni versore v valga

$$D_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \, .$$

Mostrare che allora f ï¿œ differenziabile nel punto x_0.

N.B.1. E' noto dalla teoria che se una funzione ï¿œ differenziabile in un punto $x_0 \in \Omega$, allora essa ï¿œ continua in quel punto, ammette tutte le derivate direzionali e vale la formula precedente. Si puï¿œ inoltre mostrare che questo risultato non ï¿œ una condizione sufficiente per la differenziabilitï¿œ (vedi il **N.B.2**); l'esercizio mostra che sostituendo la continuitï¿œ di f con la sua Lipschitzianitï¿œ si riesce ad ottenere una condizione sufficiente per la differenziabilitï¿œ.

N.B.2. Come controesempio si puï¿œ considerare la seguente funzione:

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\left\{1 - e^{-\frac{x^2+y^2}{|x|}}\right\} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

E' abbastanza facile (circa al livello degli esercizi visti ad esercitazione) mostrare che f ï¿œ continua in $(0,0)$, che $D_v f(0,0) = (0,0)$ per ogni versore v, ma che f non ï¿œ differenziabile in $(0,0)$.

2. La *costante di Eulero-Mascheroni* γ ï¿œ definita dal seguente limite:

$$\gamma := \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) .$$

Mostrare che tale costante ï¿œ ben definita, nel senso che il limite effettivamente esiste (in $\mathbb{R}$).

Hint: A leggere l'enunciato, sembra un esercizio di Analisi 1, perï¿œ esiste (almeno) una soluzione che usa tecniche di Analisi 2. A voi il piacere di trovarla.

Gossip: Di tale costante non si ancora se sia razionale o irrazionale!!