

Cognome _____ Nome _____ matr. _____

Fornire una risposta sintetica a ciascuna domanda.

1) Dominio della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3-|2x-3|}}$

Deve essere $x+3-|2x-3| > 0$, cioè $x+3 > |2x-3|$

la soluzione è $0 < x < 6$.

Volendo risolvere in maniera analitica anziché grafica:

$$\begin{cases} \text{se } x < 3/2 & x+3 > -2x+3 & 3x > 0 & x > 0 \\ \text{se } x \geq 3/2 & x+3 \geq 2x-3 & 6 > x & x < 6 \end{cases}$$

2) Dominio della funzione $\ln(2^{2x} - 2^{x+1} - 3)$.

Deve essere $2^{2x} - 2^{x+1} - 3 > 0$, $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = (2^x + 1) \cdot (2^x - 3)$ quindi

$$2^x > 3, \quad x > \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

3) Siano $z = (1 + i\sqrt{3})$, $w = (1 + i\sqrt{3})^4$.

Scrivere z e w in forma trigonometrica e w in forma algebrica.

$$z = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$w = \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right\}^4 = 16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

4) Sia $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $g(x) = 3^{2x}$; allora $\varphi(x) = f(g(x)) =$

Se $y = g(x) = 3^{2x}$ e $f(y) = \frac{1}{y^4}$ allora $\varphi(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\{g(x)\}^4} = \frac{1}{(3^{2x})^4} = \frac{1}{3^{8x}} = 3^{-8x}$.

$$\varphi'(x) = -8 \cdot 3^{-8x} \cdot \ln 3.$$

$$f'(y) = -4y^{-5}, \quad g'(x) = 2 \ln 3 \cdot 3^{2x}, \quad \varphi'(x) = -4y^{-5} \cdot 2 \ln 3 \cdot 3^{2x} = -8 \ln 3 \cdot 3^{-10x+2x}.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-10}{2n-\sqrt{n}} \right)^{-\ln n} =$$

$$\left(\frac{3n-10}{2n-\sqrt{n}} \right)^{-\ln n} = \left(\frac{3-\frac{10}{n}}{2-\frac{1}{\sqrt{n}}} \right)^{-\ln n} \rightarrow 0 \quad (\text{non è una forma di indecisione}).$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 \cdot n^n + \cos(n!) + \log^{20} n}{2^n - n^n} =$$

$$\frac{-2 \cdot n^n + \cos(n!) + \log^{20} n}{2^n - n^n} = \frac{-2 + \frac{\cos(n!)}{n^n} + \frac{\log^{20} n}{n^n}}{\frac{2^n}{n^n} - 1} \rightarrow 2.$$

perché $2^n = o(n^n)$, $\log^{20} n = o(n^n)$ e $\cos(n!)$ è limitata.

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{7/2} + 2x}{\sqrt{x^2 + x^4}} =$$

$$\frac{x^{7/2} + 2x}{\sqrt{x^2 + x^4}} = \frac{x \cdot (x^{5/2} + 2)}{\sqrt{x^2(1+x^2)}} = \frac{x \cdot (x^{5/2} + 2)}{|x| \sqrt{(1+x^2)}} = \frac{(2 + x^{5/2})}{\sqrt{(1+x^2)}} \rightarrow 2 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{7/2} + 2x}{\sqrt{x^2 + x^4}} =$$

$$\frac{x^{7/2} \left(1 + \frac{2}{x^{5/2}}\right)}{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x^{7/2} \left(1 + \frac{2}{x^{5/2}}\right)}{x^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = x^{3/2} \frac{1 + \frac{2}{x^{5/2}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^x =$$

$$\left(\frac{x-2}{x+3} \right)^x = \left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} \right)^x = \frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x} \rightarrow \frac{e^{-2}}{e^3} = e^{-5}.$$

oppure $\left(\frac{x-2}{x+3} \right)^x = \left(\frac{x+3-5}{x+3} \right)^x = \left(1 - \frac{5}{x+3} \right)^x \rightarrow e^{-5}.$

10) La funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & , x > 2 \\ ax^2 + 2x - 5 & , x \leq 2 \end{cases}$ è continua per $a =$

Certamente f è continua per ogni $x \neq 2$, $f(2) = 4a - 1 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$
quindi f è continua quando $4a - 1 = 1$, $a = \frac{1}{2}$.

11) Determinare tutti i valori di a (reale) per cui la funzione $f(x) = \begin{cases} 5x & , x > 1 \\ ax + 3 & , x \leq 1 \end{cases}$ è crescente

f è crescente per $x > 1$ ed è crescente per $x < 1$ per ogni $a > 0$.

Perché sia crescente globalmente è necessario (e sufficiente) che in $x = 1$ non ci sia un "salto in basso",
cioè che $a + 3 \leq 5$.

Deve dunque essere $0 < a \leq 2$.

11 bis) Determinare tutti i valori di a (reale) per cui la funzione $f(x) = \begin{cases} 5x & , x > 1 \\ ax + 3 & , x \leq 1 \end{cases}$

è invertibile e scrivere l'espressione della funzione inversa.

Per $a \in (0, 2]$ f è certamente invertibile (è monotona). Non può esserlo negli altri casi: per $a > 2$ i
valori tra 5 ed $a + 3$ vengono assunti due volte, per $a = 0$ il valore 3 viene assunto infinite volte, per $a < 0$
tutti i valori superiori a 5 vengono assunti due volte.

La funzione inversa è: $x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{5} & \text{per } y > 5 \\ \frac{y-3}{a} & \text{per } y \leq a+3 \end{cases}$ (si ricordi: $0 < a \leq 2$).