Esercizi integrali multipli

I.1. Calcolare l'integrale doppio $I = \iint_C y dxdy$ esteso alla regione piana C definita dalle disequazioni

$$\{R^2 \leq x^2 + y^2,\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$$

considerando le diverse espressioni che si ottengono al variare di R da 0 a $+\infty$.

I.2. Calcolare l'integrale

$$\iint_D x \sin |x^2 - y| dxdy$$

esteso al quadrato $0 \leq x, y \leq 1$.

I.3. Calcolare l'integrale

$$\iint_C x^2 dxdy$$

dove C è la regione piana delimitata dalle disequazioni $y \leq -x^2 + \frac{1}{2}x + 3,\ y \geq -x^2 - x,\ y \geq -x^2 + 2x$.

I.4. Trovare un cambiamento di variabile che porti l'insieme D definito da

$$\{x^2 \leq y \leq 2x^2,\ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$$

nell'insieme $D' = \{(t, u) : 1 \leq t \leq 2, 1 \leq u \leq 2\}$. Disegnare D e calcolarne l'area.

I.5. Determinare l'area di $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x/2$.

I.6. Calcolare l'area del dominio definito in coordinate polari da

$$\frac{1}{2} \leq \varrho \leq 1 + \cos \varphi.$$

I.7. Sia B il sottoinsieme del piano definito da $x < y < 3x$, $xy < 3$. Calcolare

$$\iint_B x^2 e^{xy} dxdy.$$

I.8. Calcolare l'integrale iterato

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dxdy.$$

I.9. Calcolare il volume del solido delimitato dalle condizioni $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$, $z = 0$, $z = 4 - x - y$.

I.10. Determinare il volume del solido individuato dalle disequazioni $x^2 + y^2 - 2x \cos z + \cos^2 z \leq 1$, $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$.

I.11. Calcolare il volume dell'intersezione tra i cilindri $x^2 + y^2 \leq r^2$ e $y^2 + z^2 \leq r^2$.

I.12. Calcolare il volume di $C \subset \mathbf{R}^3$ definito dalle disequazioni $x^2/4 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 12 - xy$.

I.13. Calcolare $\iiint_D x dx dy dz$, dove $D = \{(x, y, z) : 2x \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq x\}$.

I.14. Rappresentare graficamente il sottoinsieme A di $\mathbf{R}^3$ tale che

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_x^2 \left(\int_y^2 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

I.15. Sia $R = [-a, a] \times [-b, b]$, con $a > 1$, $b > 1$; sia $Q = [c - 1, c + 1] \times [-1, 1]$. Determinare il baricentro di $R \setminus Q$ al variare di c in $[0, +\infty)$ (si supponga che la densità di massa di R sia costante e uguale a uno).

I.16. Calcolare il baricentro della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$, la cui densità in ogni punto è uguale al quadrato della distanza del punto dall'origine.

I.17. Calcolare $\iiint_D x dx dy dz$, dove D è il complementare in $\{\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1,\ 0 \leq x\}$ dell'insieme $\{x \geq \sqrt{y^2 + z^2}\}$.

I.18. Calcolare il volume dell'insieme

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 4x \leq 12,\ x \geq 0,\ 2 \leq z \leq 5\}.$$

I.19. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2 + nx}\ .$$

Calcolare il limite puntuale

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

su $[0, +\infty)$ e discutere la convergenza uniforme della successione $f_n(x)$ in $[0, +\infty)$ e in $[1, +\infty)$.

Discutere la convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \qquad \text{su } [0, +\infty).$$

I.20. Sia data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^2 \exp(-n^3 x^3).$$

Stabilire per quali valori di x la serie converge. Detta $f(x)$ la sua somma, dimostrare che f è continua in $[0, +\infty)$. Dimostrare che f è di classe C^1 in $[2, 5]$.