CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA
Proff. Marco Peloso e Libor Vesely

Analisi Matematica 3 – Prova scritta 26 gennaio 2009 – Versione **A**

Cognome, Nome, Matricola:

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, dove

$$f_n(x) = \frac{\log(x + 3^{-n})}{x\sqrt[3]{n^4+1}}\,.$$

(i) Determinare l'insieme $\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{dom}\,(f_n)$ e l'insieme $\mathcal{P}$ della convergenza puntuale della serie.

(ii) Stabilire se la serie converge uniformemente su $\mathcal{P}$.

(iii) Detta f la somma della serie, mostrare che f è continua su $\mathcal{P}$.

Esercizio 2. (12 punti) Siano V il dominio di $\mathbf{R}^3$

$$V = \left\{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \le 3,\ 0 \le z \le 8-2x-y\right\},$$

ed S la superficie data dalla frontiera ∂V di V, orientata in modo che la normale a S sia esterna a V (cioè il verso *uscente* da V), e sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z, 2y+x^2z, z-yx^2)\,.$$

(i) Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso S.

(ii) Detta S_0 la parte inferiore della superficie S, calcolare il flusso di $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ attraverso S_0.

(iii) Detta S_t la parte superiore della superficie, calcolare $\int_{+\partial S_t} \omega$, dove $\omega = z^2dx + xyzdy + 2xzdz$.

(Si noti che la superficie S risulta unione di 3 superfici regolari, la parte inferiore S_0, contenuta nel piano $z=0$, una porzione laterale S_ℓ, e la parte superiore S_t, contenuta nel piano $z = 8-2x-y$.)

Esercizio 3. (6 punti) È dato il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 = 1 \\ xy+yz-xz+x-2 = 0\,. \end{cases}$$

Si mostri che tale sistema definisce due funzioni $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ in un intorno del punto $(1,1,1)$. Posto $\mathbf{f}(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$, si calcoli la matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ in $x=1$.

Esercizio 4. (6 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\log(1+x^3)}{x^{7/2}+n}\,dx$$

giustificando la risposta.

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA
Proff. Marco Peloso e Libor Vesely

Analisi Matematica 3 – Prova scritta 26 gennaio 2009 – Versione **B**

Cognome, Nome, Matricola:

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, dove

$$f_n(x) = \frac{\log(x + 2^{-n})}{x\sqrt{n^3+1}}\,.$$

(i) Determinare l'insieme $\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{dom}\,(f_n)$ e l'insieme $\mathcal{P}$ della convergenza puntuale della serie.

(ii) Stabilire se la serie converge uniformemente su $\mathcal{P}$.

(iii) Detta f la somma della serie, mostrare che f è continua su $\mathcal{P}$.

Esercizio 2. (12 punti) Siano V il dominio di $\mathbf{R}^3$

$$V = \left\{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \le 2,\ 0 \le z \le 9 - x - 3y\right\},$$

ed S la superficie data dalla frontiera ∂V di V, orientata in modo che la normale a S sia esterna a V (cioè il verso *uscente* da V), e sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + y^2 z, y + z, z - xy^2)\,.$$

(i) Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso S.

(ii) Detta S_0 la parte inferiore della superficie S, calcolare il flusso di $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ attraverso S_0.

(iii) Detta S_t la parte superiore della superficie, calcolare $\int_{+\partial S_t} \omega$, dove $\omega = xyz dx + z^2 dy + 2yz dz$.

(Si noti che la superficie S risulta unione di 3 superfici regolari, la parte inferiore S_0, contenuta nel piano $z = 0$, una porzione laterale S_ℓ, e la parte superiore S_t, contenuta nel piano $z = 9 - x - 3y$.)

Esercizio 3. (6 punti) È dato il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ xz + yz - xy - 2x + 1 = 0\ . \end{cases}$$

Si mostri che tale sistema definisce due funzioni $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ in un intorno del punto $(1,1,1)$. Posto $\mathbf{f}(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$, si calcoli la matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ in $x = 1$.

Esercizio 4. (6 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\log(1+x^2)}{x^{5/2}+n^2}\,dx$$

giustificando la risposta.