ANALISI COMPLESSA
Corsi di Laurea in Matematica

Esercizi–Foglio 1

---

1. Tutti gli esercizi dei Capitoli 1 e 3 degli Appunti.

2. Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$(-1+i\sqrt{3})^n + (-1-i\sqrt{3})^n.$$

3. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$, il prodotto delle radici n–esime di z è uguale a $(-1)^{n+1}z$.

4. Sia $f \in H(\Omega)$, con Ω dominio. Dimostrare che se $|f(z)|$ è costante in Ω, allora f è costante. Anche se $\mathrm{Re} f$ è costante oppure se $\mathrm{Im} f$ è costante in Ω, allora f è costante.

5. Per ogni $z \neq 0$ sia $f(z) = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}}$. Determiare per quali z la funzione soddisfa le condizioni di Cauchy–Riemann.

6. Sia $f \in H(\Omega)$, con Ω dominio, e sia $|f(z)^2 - 1| < 1$ per ogni $z \in \Omega$. Mostrare che $f(\Omega)$ è interamente contenuto nel semipiano Re $z > 0$ oppure in Re $z < 0$.

7. Mostrare che, per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha
$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}.$$
Inoltre, per ogni z con $|z| \leq 1$ è
$$|e^z - 1| \leq 2|z|.$$

8. Risolvere le seguenti equazioni
   (a) $\cos(iz^2) + i\sin(iz^2) = 1$
   (b) $|\cos(iz) + \sinh z| = e^{iz}$

9. Risolvere le seguenti equazioni e collocare le soluzioni nel piano complesso.
   (a) $e^{z^2} + 1 = 0$
   (b) $\sin(e^{iz}) = 0$
   (c) $\cosh(\pi z/2) = 0$
   (d) $e^{1/z} - e^z = 0.$

10. Data la successione $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ con $a_n \to 0$ e tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}|$ converga, mostrare che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge per $|z| \leq 1$ eccetto al più in $z = 1$. Inoltre la convergenza è uniforme in $\{|z| \leq 1\ ,\ |z-1| \geq \delta\}$ per ogni $\delta > 0$.

11. Per ogni $t \in (0, 2\pi)$ calcolare

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n}.$$

12. Mostrare che, per ogni coppia di numeri complessi non nulli z e w, si ha

$$\log(zw) = \log z + \log w$$

quando l'affermazione si interpreta come uguaglianza insiemistica.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, discutere le relazioni di inclusione tra

$$\log(z^n) \qquad \text{e} \qquad n \log z.$$

13. Determinare la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$\operatorname{cotg}(z) = \operatorname{cotg}(x + iy).$$

14. Calcolare tutti i valori di $(-1)^i$.

15. Calcolare i valori principali dei seguenti numeri: $\left(i(i-1)\right)^i$ e $i^i(i-1)^i$.

16. Determinare l'aperto massimale dove la funzione $f(z) = \operatorname{Log}(1 + z^5)$ è ben definita ed olomorfa.

17. Determinare lo sviluppo in serie di potenze centrato in z_0 delle seguenti funzioni, determinandone, se possibile, il raggio di convergenza.

    (a) $f(z) = \frac{1}{z^2+5} \qquad z_0 = -1 + i$

    (b) $f(z) = \frac{2z-18}{z^2-8z+12} \qquad z_0 = 0$

    (c) $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+i}{k!} z^k \qquad z_0 = 2 + i.$

18. Per ogni $r > 0$ sia $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$. Mostrare che

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{iz^2} dz \right| < \frac{\pi}{4r}.$$

19. Sia γ la frontiera di $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < |z| < 2, \ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ percorsa in senso antiorario. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\bar{z}}{z} \, dz.$$

20. Se $\gamma_r(t) = re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, mostrare che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$