ANALISI COMPLESSA
Corsi di Laurea in Matematica

Esercizi–Foglio 2

---

1. Tutti gli esercizi dei Capitoli 2 e 4 degli Appunti.

2. Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\displaystyle\int_{|z+2|=1} \frac{1}{(z-2)^3}dz, \qquad \int_{|z-2|=1} \frac{1}{(z-2)^3}dz,$

   (b) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$

   dove $\gamma = \partial Q$ e Q è il quadrato centrato nell'origine e con lati di lunghezza 4.

   (c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz, \qquad \int_{|z|=3} \frac{\sinh(z-1)}{z^2(1-z)}dz$

3. Calcolare, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^m(1-z)}\, dz$ dove

   (a) $\gamma = \partial D(1, 1/2)$; (b) $\gamma = \partial D(0, 1/2)$; (c) $\gamma = \partial D(1/2, 1)$

   percorse una volta in senso antiorario.

4. Sia Ω un dominio e $f \in H(\Omega)$ non costante. Mostrare che $|f|$ non può avere minimo in un punto $z_0 \in \Omega$ a meno che $f(z_0) = 0$.

5. Stabilire in quali regioni del piano complesso la somma delle seguenti serie di funzioni è una funzione olomorfa.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in^2 z}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{(1+n)^2}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)^{-z}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{n^2 e^{nz}}$.

6. Mostrare che la somma di ciascuna delle seguenti serie è una funzione olomorfa in $D = D(0, 1)$.

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}.$$

   Mostrare che si tratta di una sola funzione.

7. Determinare in quale sottoinsieme A del semipiano superiore la serie

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{\cos(nz)}$$

   converge. La somma è olomorfa in A?

8. Calcolare, giustificando il procedimento, l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \log \left| re^{it} - a \right| \, dt$$

dove $a \in \mathbb{C}$, $0 < r < |a|$.

9. Sia $D = D(0,1)$ e $f \in H(D)$. Mostrare che

$$2|f'(0)| \leq \sup_{z,w \in D} |f(z) - f(w)|.$$

10. Sia $D = D(0,1)$ e $f \in H(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$ con $f(z) \neq 0$ in D. Mostrare che se

$$|f(z)| = 1 \qquad \text{per ogni } z \text{ con } |z| = 1$$

allora f è costante.

(Suggerimento: estendere f opportunamente ad una funzione intera.)

11. Sia γ una curva chiusa semplice, regolare a tratti e orientata in senso antiorario. Dimostrare che

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z) \, dz = -i \int_\gamma \mathrm{Im}(z) \, dz = \frac{1}{2} \int_\gamma \bar{z} \, dz = iA$$

dove A è l'area racchiusa da γ.

12. Siano $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r > 0$. Dimostrare che l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{1}{|z-a|^2} \, |dz| \; = \; \frac{2\pi r}{||a|^2 - r^2|} \, .$$

(Suggerimento: trasformare l'integrale curvilineo in un integrale del tipo $\int_{\partial D(0,r)} g(z) \, dz$.)