ANALISI COMPLESSA
Corsi di Laurea in Matematica

Esercizi–Foglio 3

---

1. Si consideri lo sviluppo di Laurent in $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z-1| < R\}$ della funzione
$$f(z) = \frac{\pi}{(z^2-1)\sin \pi z}.$$
Dopo aver specificato il valore massimo di R, determinare la parte singolare di tale sviluppo.

2. Determinare <u>tutti</u> gli sviluppi di Laurent centrati in $z_0 = 0$ della funzione
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}.$$

3. Determinare e classificare le singolarità in $\mathbb{C}^*$ delle seguenti funzioni. Ove possibile, calcolare i residui.

(a) $f(z) = \dfrac{5-2z}{(z+1)^2}$; (b) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\pi/z)}$; (d) $f(z) = \dfrac{e^{1/z} - e^z}{z^2-1}$.

4. Determinare e classificare le singolarità in $\mathbb{C}^*$ delle seguenti funzioni.

(a) $f(z) = \dfrac{z^3}{1-\cosh z}$; (b) $f(z) = \dfrac{z+5}{e^{1/z}-3}$

(c) $f(z) = \dfrac{z-1}{1+\cos \pi z}$; (d) $f(z) = \dfrac{1}{z \cos \frac{\pi}{2(1-z)}}$.

5. Al variare di $a \in \mathbb{C}$, classificare le singolarità in $\mathbb{C}^*$ di
$$f(z) = \frac{e^{1/z} + 2i}{z^2 - a^2}.$$
Calcolare, quando possibile, $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)dz$.

6. Siano: $z_0 \in \mathbb{C}$, f una funzione avente in z_0 una singolarità essenziale, e P un polinomio non costante. Dimostrare che la composizione $P \circ f$ ha in z_0 una singolarità essenziale.

7. Sia f una funzione olomorfa nell'aperto $\Omega = D(0,2) \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Supponiamo che il punto $\frac{1}{2}$ sia un polo semplice per f, con residuo 1. Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{2^n n!} \, .$$

8. Calcolare (con il metodio dei residui) i seguenti integrali.

   (a) $\displaystyle\int_{\partial E} \frac{e^{\pi z}}{2z^2 - i} \, dz$ dove $E = \{z \in D(0,1) : \ \mathrm{Re}(z) > 0, \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$

   (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3 \exp(1/z)}{1+z} \, dz$

   (c) $\displaystyle\int_{|z|=8} \frac{dz}{e^z - 1}$

9. Sia f meromorfa in $\mathbb{C}$ e tale che

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

   Mostrare che f è una funzione razionale (rapporto di due polinomi).