ANALISI COMPLESSA
Corsi di Laurea in Matematica

Esercizi–Foglio 4

---

1. Date le funzioni
$$f(z) = \frac{e^z \sin\big(1/z\big)}{z}, \qquad g(z) = \frac{1}{f(z)}$$
determinare e classificare le singolarità in $\mathbb{C}^*$ di entrambe e calcolare i residui di f.

2. Determinare e classificare le singolarità in $\mathbb{C}^*$ di
$$f(z) = \frac{e^{1/z}\sin(z^2)}{\sin(e^{iz})}.$$

3. Calcolare i seguenti integrali.
$$\text{a)} \quad \int_{|z-\frac{\pi}{2}|=\pi+1} z\tan z\, dz; \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_{|z-1|=2} \frac{e^{1/z}\cosh(\pi z/2)}{z^2+1}\, dz.$$

4. Determinare, se possibile, una funzione f con le seguenti proprietà:
   (a) le uniche singolarità in $\mathbb{C}$ di f sono poli del primo ordine in $z = 1$ con residuo 2 e in $z = -1$ con residuo $i\pi$.
   (b) $\frac{f(z)}{z^2} \to -2i$ se $|z| \to +\infty$
   (c) $f(0) = f'(0) = 0$

5. Calcolare
$$\text{a)} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x} \quad (a>0); \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x(1+x^2)}\, dx;$$
$$\text{c)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx \quad (0<a<1); \qquad\qquad \text{d)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx\,.$$

6. Calcolare, al variare del parametro intero naturale $k \geq 1$
$$I_k \equiv \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^k(1+x^2)}\, dx\,.$$

7. Sia $P(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$. Determinare il numero di zeri di P nell'anello $1 \leq |z| < 2$.

8. Calcolare

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x}}\,dx;$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx;$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}\,dx\,;$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx\,.$

9. Calcolare, al variare del parametro reale a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x^4)}\,dx\,.$$

10. Siano $r > 0$ e $a, b \in D(0, r)$. Dimostrare che la funzione

$$f(z) = \mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}$$

è olomorfa in un aperto contenente $\mathbb{C} \setminus D(0, r)$, e calcolare

$$\int_{|z|=r} z^n f(z)\,dz \qquad (n \geq 0 \text{ intero}).$$

11. Sia Ω un dominio e $f \in H(\Omega)$. Sia $z_0 \in \Omega$ e $f'(z_0) \neq 0$. Mostrare che esiste $r > 0$ tale che

$$\int_\gamma \frac{f'(z_0)}{f(z) - f(z_0)} dz = 2\pi i$$

dove $\gamma = \partial D(z_0, r)$.

12. Sia $f \in H(\Omega)$ con $z_0 \in \Omega$ zero del primo ordine per f. La funzione $G(z) = 1/[f(z)]^2$ ha ovviamente un 2–polo in z_0. Mostrare che

$$\mathrm{Res}(G, z_0) = -\frac{f''(z_0)}{\big(f'(z_0)\big)^3}.$$

13. Mostrare che la funzione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{n!(z^2+n^2)}$$

è meromorfa in $\mathbb{C}$. Deteminare i suoi poli e il loro ordine.

14. (*) Siano $D = D(0, 1)$ e Ω dominio con $\overline{D} \subset \Omega$ e $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ con $|z_0| = 1$ e z_0 polo del primo ordine. Se a_n sono i coefficienti dello sviluppo di Taylor di f centrato nell'origine, mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$