ANALISI COMPLESSA - Corso da 9 CFU
Corsi di Laurea in Matematica

Esercizi–Foglio 5

Tutti i temi d'esame hanno un esercizio sugli argomenti di questo foglio di esercizi.

---

1. Sia $D = D(0,1)$. Mostrare che $\mathcal{F}$ è normale se
$$\mathcal{F} = \left\{ f \in H(D) \quad : \quad f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{con } a_1 = 1 \text{ e } |a_n| \le n \right\}.$$

2. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia normale di funzioni olomorfe in un dominio Ω.

   Detto $\mathcal{G} = \{g \ : \ g = f' \ , f \in \mathcal{F}\}$, mostrare che $\mathcal{G}$ è normale.

3. Determinare tutte le trasformazioni lineari fratte del disco unitario in sé che mandano i tre punti $(1; i; -1)$ nei tre punti $(1; -i; -1)$ (nell'ordine assegnato).

4. Sia $F(z) = (z-i)/(z+i)$. Determinare l'immagine dei seguenti insiemi via F. (i) La semiretta $\{it \ : \ t \ge 0\}$; (ii) la retta $\{i + t \ : \ t \in \mathbb{R}\}$; (iii) la circonferenza $\{|z-1| = 1\}$; (iv) la semicirconferenza $\{|z| = 2, \ \mathrm{Im} z > 0\}$; (v) la semiretta $\{1 + it \ : \ t \ge 0\}$.

5. Trovare una mappa conforme da $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1, 0 < \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$ in $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i| < 3\}$.

6. Mostrare che $\prod_{n=1}^{+\infty} |1 + i/n|$ converge, mentre $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + i/n)$ non converge.

7. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri complessi. Mostrare che ciascuna delle condizioni $\sum a_n$ *converge* e $\prod(1 + a_n)$ *converge* non implica l'altra.

8. Mostrare che
$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

9. Mostrare che, se $|z| < 1$ il prodotto infinito $(1+z)\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + z^{2^n})$ convege a $1/(1-z)$ e che non converge se $|z| > 1$.

10. Mostrare che
$$\cos \pi z = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$
    Dedurne una fattorizzazione per le funzioni $\sinh z$ e $\cosh z$.

11. Sia $f(z) = e^{e^z} - 1$. Trovare gli zeri $\{z_j\}$ di f e determinare l'esponente di convergenza (se finito) della successione $\{z_j\}$.

12. Siano f e g funzioni intere di ordine finito ρ. Mostrare che le funzioni fg e $f+g$ sono di ordine finito $\leq \rho$. La disuguaglianza può essere stretta?

13. Sia f intera tale che $f(m) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$ e sia
$$|f(z^2)| \leq e^{|z|}, \qquad \text{per ogni } z.$$
Dedure che f è identicamente nulla.

14. Determinare il prodotto canonico di Weierstrass (specificandone il genere) relativo alla successione degli zeri della funzione
$$F(z) = \sinh(z^2).$$

15. Sia
$$A = \{z_{j,k} = \sqrt{j}e^{i\frac{k\pi}{3}} \ : \ (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}.$$
   (a) Determinare una funzione intera di ordine finito e minimale che abbia A come insieme degli zeri. Quale è il suo ordine? È unica?
   (b) Determinare una funzione di ordine 5 che si annulli in A.
   (c) Determinare una funzione di ordine $2e$ che si annulli in A.

16. a) Determinare una funzione f intera tale che $f(j) = j^{-2}$ per ogni $j \neq 0 \in \mathbb{Z}$;
   b) Determinare, se esiste, una funzione g intera tale che $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
   c) Determinare, se esiste, una funzione h intera tale che $g(\frac{1}{n}) = \frac{(-)^n}{n^2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

17. Determinare una funzione intera f tale che $f(n+in) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Fornire l'esempio più elementare possibile, ovvero determinare gli esponenti p_n più piccoli possibili nelle funzioni $E(z/(n+in), p_n)$.

18. Determinare una funzione biolomorfa tra le seguenti coppie di domini Ω_1 e Ω_2. (Nel seguito $D = D(0,1)$ and $\mathcal{U} = \{z = x + iy \ : \ y > 0\}$.)
   (a) $\Omega_1 = \mathcal{U} \setminus \{it \ : \ t \leq 1\}$ e $\Omega_2 = D$;
   (b) $\Omega_1 = D \cap \{\text{primo quadrante }\}$ e $\Omega_2 = \mathcal{U}$;
   (c) $\Omega_1 = D \setminus \{[\alpha, 1)\}$ e $\Omega_1 = D \setminus \{[0, 1)\}$ con $0 < \alpha < 1$.