Corso di Modelli Matematici in Biologia
Esame del 25 Giugno 2018

Scrivere **chiaramente** in testa all'elaborato:

`Nome, Cognome, numero di matricola.`

Risolvere tutti gli esercizi. Tempo a disposizione: **DUE ORE E MEZZA**.
Non e' consentito l'uso di libri o appunti; e' consentito (ma non necessario) l'uso di calcolatrici.

I risultati, la soluzione e le eventuali istruzioni per la verbalizzazione saranno disponibili in rete tra qualche giorno.

Esercizio 1. Si consideri un modello di competizione tra due popolazioni con fitness a priori $W_a = W_b = 2$. Il loro successo riproduttivo e' descritto dalla tabella dei vantaggi per le fitness

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1-\delta \\ \delta & 1/2 \end{pmatrix} ,$$

dove $0 < \delta < 1$. Si chiede di determinare quali sono le situazioni di equilibrio al variare di δ e la stabilità degli equilibri banali. È possibile avere un equilibrio in cui entrambe le frequenze valgono $p_e = \frac{1}{2}$? Giustificare la risposta.

Esercizio 2. Due popolazioni di batteri interagiscono in maniera competitiva secondo le equazioni

$$\begin{aligned} dx/dt &= x - 2xy - x^2 \\ dy/dt &= y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

Se ne determinino gli equilibri biologicamente significativi e si classifichino secondo la relativa stabilità.

Esercizio 3. L'evoluzione di una popolazione è descritta dal modello a tempo discreto

$$p_{n+1} = 2p_n(1 - e^{-\alpha p_n}) ;$$

si studino gli equilibri e la relativa stabilità al variare del parametro $\alpha > 0$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

Dalla legge di evoluzione delle fitness si ottiene (denotando con p la frequenza della popolazione A)

$$W(A) = 3 - \delta + (\delta - 2)p \ , \qquad W(B) = \frac{5}{2} + p(\delta - \frac{1}{2}) \ ;$$

le fitness sono sempre positive.

La fitness media risulta

$$< W >= p[3 - \delta + (\delta - 2)p] + (1 - p)\left[\frac{5}{2} + p(\delta - \frac{1}{2})\right] = -\frac{3}{2}p^2 + \frac{5}{2} \ .$$

La legge di evoluzione delle frequenze diventa quindi

$$\hat{p} = f(p) := \frac{p[3 - \delta + (\delta - 2)p]}{-\frac{3}{2}p^2 + \frac{5}{2}} \ . \tag{1}$$

La mappa $f(p)$ ammette sicuramente gli equilibri banali, come si verifica

$$f(0) = 0 \ , \qquad f(1) = \frac{\delta - 2 + 3 - \delta}{\frac{1}{2}[5 - 3]} = 1 \ .$$

Un eventuale terzo equilibrio non banale accettabile deve risultare necessariamente dall'uguaglianza delle fitness

$$W(A) = W(B) \ , \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 - \delta + (\delta - 2)p = \frac{5}{2} + p(\delta - \frac{1}{2}) \ ,$$

che fornisce la soluzione

$$p_e = \frac{1 - 2\delta}{3} \ .$$

Tale soluzione è acettabile solo se risulta

$$0 < p_e < 1 \ ,$$

ovvero per $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Per tali valori del parametro, si ha in particolare

$$0 < p_e < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \ ,$$

ovvero non è possibile arrivare ad avere $p_2 = \frac{1}{2}$. Questo a causa della scelta $\delta > 0$ che forza $1 - 2\delta$ ad essere sempre minore di uno.

Per studiare la stabilità, partiamo dall'equilibrio più semplice $p_a = 0$. Calcoliamo la derivata prima di $f(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ senza semplificarla

$$f'(p) = \frac{N'(p)D(p) - N(p)D'(p)}{D^2(p)} \ . \tag{2}$$

Si ha

$$f'(p_a) = \frac{N(0)}{D(0)} = \frac{3 - \delta}{5/2} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta > \frac{1}{2} \ ,$$

quindi p_a è un ATTRATTORE per $\delta > \frac{1}{2}$, ovvero quando esistono solo i due equilibri banali. In tale situazione, il secondo equilibrio $p_b = 1$ sarà necessariamente un REPULSORE.

Nel caso $\delta < \frac{1}{2}$ l'equilibrio p_a diventa un REPULSORE. Lo studio grafico, come confermato dai conti sulla derivata prima, mostra che il secondo equilibrio banale $p_b = 1$ rimane un REPULSORE.

Esercizio 2. *Due popolazioni di batteri interagiscono in maniera competitiva secondo le equazioni*

$$\begin{aligned} dx/dt &= x - 2xy - x^2 \\ dy/dt &= y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

Se ne determinino gli equilibri biologicamente significativi e si classifichino secondo la relativa stabilità. Si interpreti il risultato alla luce del principio dell'esclusione competitiva.

Soluzione.

Vi sono chiaramente almeno 3 equilibri

$$O = (0,0) \ , \qquad A = (1,0) \ , \qquad B = (0,2) \ ,$$

come si deduce fattorizzando i due termini

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x(1 - 2y - x) \ , \\ G(x,y) &= y(1 - 2x - \frac{1}{2}y) \ , \end{aligned}$$

ed osservando che $x = 0$ ed $y = 0$ risolvono rispettivamente $F = 0$ e $G = 0$. Il terzo eventuale equilibrio deve risultare come soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 2y - x \ , \\ 0 &= 1 - 2x - \frac{1}{2}y \ , \end{aligned}$$

in quanto deve necessariamente avere entrambe le popolazioni diverse da zero. Tale sistema si risolve facilmente per sostituzione

$$x = 1 - 2y \ , \qquad 1 - \frac{1}{2}y = 2x = 2 - 4y \ ,$$

che fornisce la soluzione accettabile

$$E = (\frac{3}{7}, \frac{2}{7}) \ .$$

La matrice jacobiana risulta essere

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 2y - 2x & -2x \\ -2y & 1 - 2x - y \end{pmatrix} \ ;$$

nel primo equilibrio si ha

$$J_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

ovvero un REPULSORE DI TIPO NODO. In A si ha

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

ovvero un ATTRATTORE DI TIPO NODO. La stessa situazione si presenta in B

$$J_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

Visto che gli equilibri che corrispondono alle 2 capacità portanti (diverse tra loro) delle 2 popolazioni sono entrambi attrattori, c'è da attendersi che l'equilibrio E non sia stabile e che le sue uniche 2 soluzioni contraenti facciano da separatrici tra i bacini di attrazione dei due attrattori. Infatti si ottiene

$$J_E = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} ,$$

che rappresenta una SELLA in quanto

$$det(J_E) = -\frac{3}{7} < 0 .$$

Soluzione esercizio 3.

Gli equilibri sono forniti dalle soluzioni non negative dell'equazione (di punto fisso)

$$p = f(p) := 2p(1 - e^{-\alpha p}) ;$$

questa possiede sempre una soluzione indipendente da α

$$p_0 = 0 ,$$

che risulta essere stabile, in virtù dello sviluppo asintotico

$$p(1 - e^{-\alpha p}) \sim 2\alpha p^2 ,$$

in prossimità dell'origine. Altri equilibri possono emergere come soluzioni dell'equazione

$$2(1 - e^{-\alpha p}) = 1 ,$$

che diventa

$$e^{-\alpha p} = \frac{1}{2} .$$

Essa ammette una soluzione accettabile (positiva) p_e per ogni $\alpha > 0$

$$p^*(\alpha) = \frac{\ln(2)}{\alpha} .$$

È possibile studiare la stabilità considerando la derivata $f'(p)$ della funzione $f(p)$

$$f'(p) = 2[1 + e^{-\alpha p}(\alpha p - 1)] ,$$

e valutarla nei due equilibri trovati. Si ha

$$f'(0) = 0 ,$$

da cui la stabilità dell'origine. Per l'altro equilbrio, che esiste solo per $\alpha > 1$, si ha invece

$$f'(p_e) = 2\left[1 + \frac{1}{2}(\alpha p^* - 1)\right] = 1 + \ln(2) ,$$

risulta

$$f'(p_e) > 1 ,$$

quindi p^* è sempre un REPULSORE.