Modelli epidemiologici

Corso di Modellistica Ambientale

a.a. 2010/2011

Problema 1. *La dinamica di un'infezione in una popolazione di* $N = 10.000$ *individui e' ben descritta da un modello SIR,*

$$\begin{aligned} dS/dt &= -\alpha S I \\ dI/dt &= \alpha S I - \beta I \\ dR/dt &= \beta I \ , \end{aligned}$$

in cui i parametri valgono

$$\alpha = 0.001 \ , \quad \beta = 7.3 \ .$$

Al tempo $t = 0$ *un gruppo di* $I_0 = 10$ *individui viene infettato, ed in seguito non si hanno infezioni provenienti dall'esterno; nessuno degli individui ha una immunita' pregressa all'infezione considerata.*
Si chiede qual e' il massimo numero di infetti M_0 *raggiunto nel corso del tempo.*

Soluzione. Le soluzioni del modello SIR soddisfano

$$dI/dS = -1 + (\beta/\alpha)(1/S) \ ,$$

e quindi, integrando questa relazione e scrivendo $\gamma = \beta/\alpha$,

$$I(S) = -S + \gamma \log(S) + C \ . \tag{$*$}$$

In altre parole, la quantita'

$$C = f(S, I) = I + S - \gamma \log(S)$$

e' costante sulle soluzioni. Al tempo $t = 0$, abbiamo

$$C = f(S_0, I_0) = (I_0 + S_0) - \gamma \log(S_0) = N - \gamma \log(S_0) \ ,$$

e quindi otteniamo

$$I(S) = -S + \gamma \log(S) + N - \gamma \log(S_0) \ .$$

Con i dati proposti, $\gamma = \beta/\alpha = 7.300$, e $S_0 = N - I_0 = 9.990$. Se $S_0 > \gamma$, come in questo caso, il massimo di $I(S)$ si ha per $S = \gamma$, e quindi

$$M_0 \ = \ I(\gamma) \ = \ -\gamma + \gamma \ \log(\gamma) + N - \gamma \ \log(S_0) \ = \ (N{-}\gamma) - \gamma[\log(S_0){-}\log(\gamma)] \ .$$

Con i valori suggeriti per α e β abbiamo (approssimando all'intero piu' vicino), dato che $S_0 = N - I_0 = 9.990$,

$$M_0 \ = \ 409.9 \ \simeq \ 410 \ .$$

Problema 2. *Si consideri la stessa situazione del problema precedente, ma con una campagna di vaccinazione che copra una frazione v della popolazione. Si chiede qual e' la frazione v_* della popolazione da vaccinare per evitare lo sviluppo di un'epidemia. Si chiede inoltre di determinare il numero massimo M_v di individui infetti raggiunto nel corso del tempo, e quale e' l'efficacia, misurata come la frazione*

$$\eta_v \ = \ \frac{M_0 - M_v}{M_0} \ ,$$

della campagna di vaccinazione se

$$v \ = \ 0,025 \ , \quad 0,05 \ , \quad 0,1 \ , \quad 0,2 \ .$$

Soluzione. L'effetto della campagna di vaccinazione sara' di ridurre S_0; avremo $S_0 = (1 - v)(N - I_0)$.
Per impedire lo sviluppo di un'epidemia, e' necessario che sia

$$S_0 \ < \ \gamma \ ,$$

ossia, considerando la relazione precedente,

$$\begin{aligned} &(1 - v) \ (N - I_0) \ < \ \gamma \\ &(1 - v) \ < \ \frac{\gamma}{N - I_0} \\ &v \ > \ 1 \ - \ \frac{\gamma}{N - I_0} \\ &v \ > \ \frac{N - I_0 - \gamma}{N - I_0} \ \ := \ v_* \ ; \end{aligned}$$

con i dati proposti dal problema,

$$v_* \ = \ 269/999 \ = \ 0.269269 \ .$$

In questo caso, con la notazione del problema 1, abbiamo

$$C \ = \ f(S_0, I_0) \ = \ (I_0{+}S_0) - \gamma \ \log(S_0) \ = \ I_0{+}(1{-}v)(N{-}I_0) - \gamma \ \log[(1{-}v)(N{-}I_0)] \ ,$$

e quindi la relazione (*) fornisce

$$\begin{aligned} I(S) &= -S + \gamma \log(S) + C \\ &= -S + \gamma \log(S) + (N(1-v) + v I_0 - \gamma [\log(1-v) + \log(N-I_0)]) ; \end{aligned}$$

questa a sua volta implica che – pur di avere $S_0 = (1-v)(N-I_0) > \gamma$ (se questa non e' verificata, il massimo di I e' proprio I_0) – si ha

$$\begin{aligned} M_v = I(\gamma) &= -\gamma + \gamma \log(\gamma) + (N(1-v) + v I_0 - \gamma [\log(1-v) + \log(N-I_0)]) \\ &= [N(1-v) + v I_0 - \gamma] + \gamma [\log(\gamma) - \log(1-v) - \log(N-I_0)] \\ &= \big[(N-\gamma) - v(N-I_0)\big] - \gamma \log\left[\frac{(1-v)(N-I_0)}{\gamma}\right] . \end{aligned}$$

Una volta ottenuto M_v, l'efficacia η_v e' immediatamente calcolata dalla relazione indicata nel testo del problema,

$$\eta_v = \frac{M_0 - M_v}{M_0} .$$

Per i valori di v proposti dal problema, abbiamo (approssimando i risultati all'intero piu' vicino per quanto riguarda M_v, ed alla terza cifra significativa per quanto riguarda η_v)

v	M_v	η_v
0	410	—
0,025	345	0.158
0,05	285	0.305
0,1	180	0.561
0,2	41	0.900

Problema 3. *Si consideri la stessa situazione del problema precedente, ma con una campagna di profilassi che abbassa il valore di α di una frazione p, cioe' che porti (detto α_0 il valore di α considerato nell'esercizio precedente) ad avere $\alpha = (1-p)\alpha_0$. Si chiede qual e' il numero massimo M_p di individui infetti raggiunto nel corso del tempo, e quale e' l'efficacia, misurata come la frazione*

$$\eta_p = \frac{M_0 - M_p}{M_0} ,$$

della campagna di profilassi se

$$p = 0,005 , \quad 0,01 , \quad 0,05 , \quad 0,1 .$$

Soluzione. La variazione di α porta ad una variazione di $\gamma = \beta/\alpha$. In altre parole, la (*) resta valida, e quindi abbiamo ancora

$$I(S) = -S + \gamma \log(S) + C ,$$

con

$$C \;=\; I_0 \;+\; S_0 \;-\; \gamma \; \log(S_0) \ ,$$

ma dobbiamo ora considerare un diverso $\gamma = \gamma_p$, dipendente da p, e piu' precisamente

$$\gamma_p \;=\; \frac{\beta}{\alpha} \;=\; \frac{\beta}{(1-p)\,\alpha_0} \ .$$

Il massimo dell'epidemia si avra' sempre per $S = \gamma_p$, a condizione naturalmente che sia $S_0 > \gamma_p$ (condizione verificata per tutti i valori di p proposti; per il p piu' grande, $p = 0.1$, abbiamo $\gamma_p = 8.111$), ed altrimenti corrispondera' semplicemente ad I_0.
Avremo quindi (sempre per $S_0 > \gamma_p$)

$$\begin{aligned} M_p \;&=\; C_p \;-\; \gamma_p \;+\; \gamma_p \, \log(\gamma_p) \\ &=\; (N \;-\; \gamma_p) \;+\; \gamma_p \, [\log(\gamma_p) \;-\; \log(S_0)] \ . \end{aligned}$$

Una volta calcolato M_p, il calcolo di η_p e' immediato tramite la formula fornita nel testo del problema,

$$\eta_p \;=\; \frac{M_0 - M_p}{M_0} \ .$$

Con i dati proposti dal problema, abbiamo

p	M_p	η_p
0	410	—
0,005	398	0.028
0,01	387	0.056
0,05	299	0.270
0,1	199	0.515

Problema 4. *La dinamica di un'infezione che non produce immunita' in una popolazione di $N = 10.000$ individui e' ben descritta da un modello SI,*

$$\begin{aligned} dS/dt \;&=\; -\,\alpha\, S\, I \;+\; \beta\, I \\ dI/dt \;&=\; \alpha\, S\, I \;-\; \beta\, I \ , \end{aligned}$$

in cui i parametri valgono

$$\alpha \;=\; 7,6 \cdot 10^{-4} \ , \quad \beta \;=\; 7,15 \ .$$

Al tempo $t = 0$ un gruppo di $I_0 = 20$ individui viene infettato, ed in seguito non si hanno infezioni provenienti dall'esterno; nessuno degli individui ha una immunita' pregressa all'infezione considerata.
Si chiede qual e' il numero massimo di infetti M_0 raggiunto nel corso del tempo, e qual e' il numero di infetti una volta raggiunta la situazione di equilibrio endemico.

Soluzione. Riscrivendo ad esempio la seconda equazione come

$$dI/dt \ = \ \alpha\, I\ (S - \beta/\alpha) \ = \ \alpha\, I\ (S - \gamma)$$

e ricordando che $I + S = N$, abbiamo immediatamente che all'equilibrio

$$S_e = \gamma\ , \quad I_e = N - S_e = N - \gamma\ .$$

Inoltre, la dinamica e' monotona, cioe' il numero $I(t)$ e' sempre crescente o sempre decrescente fino a raggiungere l'equilibrio. Quindi M_0 e' pari al piu' grande tra I_e ed I_0.
Con i dati proposti dal problema,

$$\gamma \ = \ \frac{\beta}{\alpha} \ \simeq \ 9408\ ,$$

e quindi, per quanto detto prima,

$$S_e \ = \ 9408\ , \quad I_e \ = \ 592\ .$$

Abbiamo $I_e > I_0$, e quindi

$$M_0 \ = \ I_e \ = \ 592\ .$$

Problema 5. *Si consideri la stessa situazione del problema precedente, ma con una campagna di profilassi che abbassa il valore di α di una frazione p, cioe' che porti (detto α_0 il valore di α considerato nell'esercizio precedente) ad avere $\alpha = (1-p)\alpha_0$. Si chiede qual e' il numero massimo M_p di individui infetti raggiunto nel corso del tempo, e quale e' l'efficacia, misurata come la frazione*

$$\eta_p \ = \ \frac{M_0 - M_p}{M_0}\ ,$$

della campagna di profilassi se

$$p \ = \ 0,005\ , \quad 0,01\ , \quad 0,05\ , \quad 0,058\ .$$

Soluzione. Anche in questo caso, come nel problema 3, la variazione di α porta ad una variazione di γ. Se α_0 e' il valore di α nell'esercizio precedente, avremo

$$\alpha_p \ = \ (1-p)\ \alpha_0\ ,$$

e quindi

$$\gamma_p \ = \ \frac{\beta}{\alpha_p} \ = \ \frac{\beta}{(1-p)\,\alpha_0}\ .$$

La situazione di equilibrio si avra' ancora per $S = S_e = \gamma_p$, $I = I_e = N - S_e$, ed il massimo M_p raggiunto da $I(t)$ sara' pari al piu' grande tra I_e ed I_0.

Una volta calcolato I_e e quindi M_p, la η_p si calcola immediatamente tramite la formula

$$\eta_p = \frac{M_0 - M_p}{M_0} .$$

Con i dati proposti dal problema abbiamo

p	γ_p	I_e	M_p	η_p
0	9.408	592	592	—
0,005	9.455	545	545	0.080
0,01	9.503	497	497	0.160
0,05	9903	97	97	0.836
0,058	9987	13	20	0.966