Limiti con sviluppi di Taylor.

Tiziano Penati

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan(x^2)}{x^2-\sin(x^2)}$$

Svolgimento: in questo semplice caso, sviluppiamo le due funzioni trigonometriche $\sin(t)$, $\tan(t)$

$$\begin{aligned}\sin(t) &= t-\frac{1}{6}t^3+\mathrm{o}(t^3),\\ \tan(t) &= t+\frac{1}{3}t^3+\mathrm{o}(t^3),\end{aligned}$$

e sostituiamo $t=x^2$

$$\begin{aligned}\sin(x^2) &= x^2-\frac{1}{6}x^6+\mathrm{o}(x^6),\\ \tan(x^2) &= x^2+\frac{1}{3}x^6+\mathrm{o}(x^6),\end{aligned}$$

cosí possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}x^2-\sin(x^2) &= \frac{1}{6}x^6+\mathrm{o}(x^6)\sim\frac{1}{6}x^6,\\ x^2-\tan(x^2) &= -\frac{1}{3}x^6+\mathrm{o}(x^6)\sim-\frac{1}{3}x^6,\end{aligned}$$

e la funzione risulta asintotica a

$$f(x)\sim\frac{-\frac{1}{3}x^6}{\frac{1}{6}x^6}=-2.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan(x^2)}{x^2-\sin^2(x)}$$

Svolgimento: la differenza rispetto al caso precedente sta nel termine al denominatore $\sin(x)\sin(x)$. Procediamo allo sviluppo di Taylor in due modi differenti, ovvero verifichiamo (e non dimostriamo!) che elevando al quadrato lo sviluppo di $\sin(x)$ otteniamo lo sviluppo di $\sin^2(x)$. Nel primo caso si ha

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 = \\
&= x^2 + \frac{1}{36}x^6 + \mathrm{o}(x^6) - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4) + \mathrm{o}(x^6) = \\
&= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4),
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che i termini $\frac{1}{36}x^6$, $\mathrm{o}(x^6)$ sono entrambi $\mathrm{o}(x^4)$ in un opportuno intorno piccolo dell'origine. Per usare la definizione abbiamo bisogno delle derivate di $f(x) = \sin^2(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sin(2x), \\
f^{(2)}(x) &= 2\cos(2x), \\
f^{(3)}(x) &= -4\sin(2x), \\
f^{(4)}(x) &= -8\cos(2x).
\end{aligned}$$

Lo sviluppo in $x = 0$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f^{(2)}(0) + \frac{1}{6}x^3 f^{(3)}(0) + \frac{1}{24}x^4 f^{(4)}(0) + \mathrm{o}(x^4)$$

risulta essere

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

In questo caso la funzione risulta asintotica a

$$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{3}x^6}{\frac{1}{3}x^4} \to 0.$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

Svolgimento: lo scopo di questo esercizio é mostrare la potenza degli sviluppi di Taylor in casi in cui la razionalizzazione del denominatore, pur essendo possibile, risulterebbe lunga e difficile. Partiamo quindi dal denominatore; si ha

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^{\frac{1}{4}} &= 1 + \frac{1}{4}x^2 + \mathrm{o}(x^2), \\
(1-x^2)^{\frac{1}{4}} &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \mathrm{o}(x^2),
\end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$(1+x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2)^{\frac{1}{4}} \sim \frac{1}{2}x^2.$$

Le due funzioni a numeratore ammettono come sviluppi

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2),\\ e^{x^2} &= 1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2),\end{aligned}$$

quindi

$$\cos(x) - e^{x^2} \sim -\frac{3}{2}x^2;$$

la funzione risulta asintotica a

$$f(x) \sim \frac{-\frac{3}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = -3.$$

4. Un ultimo esempio che puó essere interessante affrontare é

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(x^3)} - 1}{x(\cos(x) - e^{x^2})}.$$

Giá sappiamo che

$$x(\cos(x) - e^{x^2}) \sim -\frac{3}{2}x^3.$$

Inoltre, poiché $g(x) = \tan(x^3)$ è una funzione infinitesima in un intorno dell'origine, possiamo scrivere

$$e^{\tan(x^3)} = 1 + g(x) + \mathrm{o}(g(x)) = 1 + x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Se ne deduce facilmente il limite, poiché

$$e^{\tan(x^3)} - 1 \sim x^3.$$