Funzioni integrali.

Tiziano Penati.

21 gennaio 2008

1 Esercizi svolti

1. Rappresentare graficamente la seguente funzione integrale nel suo dominio[1]

$$G(x) = \int_0^x t^4 e^{-t^2} dt. \tag{1}$$

Svolgimento: osserviamo anzitutto che la funzione integranda

$$g(t) = t^4 e^{-t^2}$$

é definita, continua e derivabile infinite volte con derivate continue su tutto $\mathbb{R}$ (diremo che una siffata funzione é *liscia* oppure $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$). Ne segue che il dominio di G é $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che g é pari e che $G(0) = 0$, quindi G é dispari ed é sufficiente studiarla solo sull'intervallo $\mathbb{I} := [0, +\infty)$. Dalla positivitá di g su $\mathbb{I}$, deduciamo tanto che G é positiva sullo stesso intervallo quanto che cresce in maniera monotona: infatti, al crescere di x, $G(x)$ rappresenta l'area di una regione sempre piú grande. La stessa informazione puó esser dedotta dalla derivata di G

$$G'(x) = x^4 e^{-x^2} > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{I}. \tag{2}$$

In particolare $G'(0) = 0$, ovvero l'origine é un flesso stazionario (ricordiamo che la funzione é dispari). Dall'espressione della derivata prima (2) ricaviamo quella della derivata seconda

$$G^{(2)}(x) = 2x^3 e^{-x^2} \left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right), \tag{3}$$

che permette di identificare il secondo flesso in $\mathbb{I}$. Quello che rimane da determinare é il comportamento di G all'infinito. Sappiamo giá che la concavitá sará rivolta verso il basso e che, dal confronto asintotico, il limite

$$L := \lim_{x\to\infty} G(x) = \int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt$$

risulta finito. Per ottenerne una maggiorazione dividiamo L in due parti

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt = \int_0^1 t^4 e^{-t^2} dt + \int_1^\infty t^4 e^{-t^2} dt = I_1 + I_2.$$

[1]vedi ex. 97 tratto da Acerbi E., Modica L., Spagnolo S., *Problemi scelti di Analisi Matematica 1*, ed Liguori.

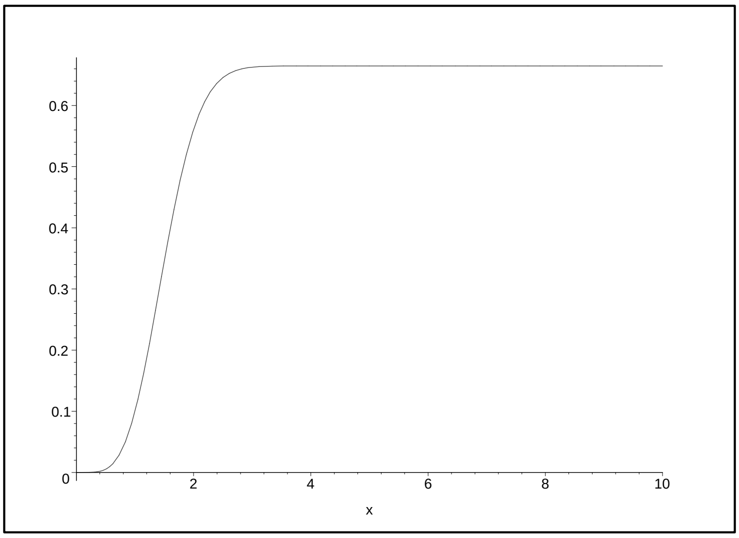

Figura 1: Grafico di (1).

Si ha

$$
\begin{aligned}
I_1 &< \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}, \\
I_2 &< \int_1^\infty t^4 e^{-t} dt = -e^{-t}\left(t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 24t + 1\right)|_1^\infty = \frac{42}{e}.
\end{aligned}
$$

2. Rappresentare graficamente la seguente funzione integrale nel suo dominio[2]

$$
G(x) = \int_{-1}^{x} \frac{e^t}{t(t+2)^{\frac{1}{3}}} dt. \tag{4}
$$

Svolgimento: anzitutto, é opportuno farsi un'idea del comportamento di

$$
g(t) = \frac{e^t}{t(t+2)^{\frac{1}{3}}}. \tag{5}
$$

Come si evince da un breve studio di funzione (vedi fig. 2), l'integranda presenta due asintoti in $x = 0$ e $x = -2$. Occupiamoci del dominio di G: per $0 < x < 1$, la funzione $G(x)$ é ben definita e negativa. Si ha

$$
L_0 := \lim_{x \to 0^-} G(x) = \int_{-1}^{0} g(t) dt = -\infty
$$

come segue dal confronto asintotico con l'integrale

$$
\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}} t} dt, \qquad\qquad \varepsilon \ll 1.
$$

[2]per esercizi simili vedere Buzzetti F., Raffaglio E., Ajroldi A., *Esercizi di Analisi Matematica 1 - parte prima e seconda*, ed. Zanichelli.

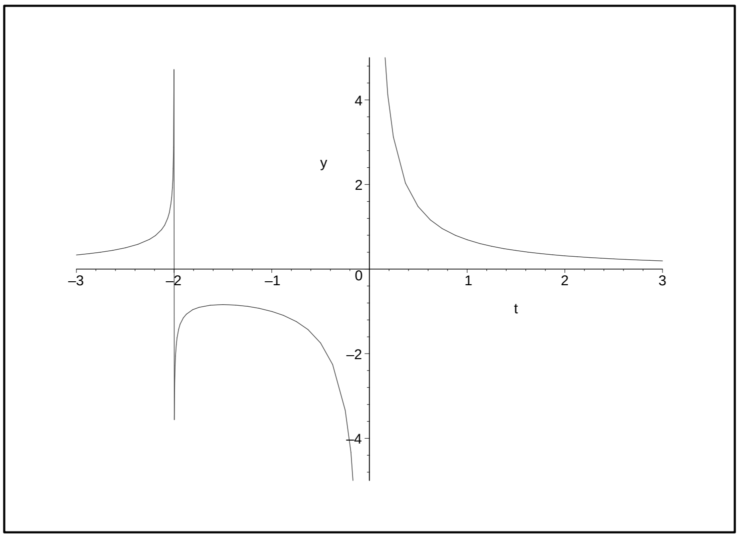

Figura 2: Grafico di (5).

Il dominio di G non si spinge oltre $x = 0$: dalla definizione di integrale di Riemann, infatti, la funzione $G(x)$ esisterebbe in $x > 0$ se e solo se esistessero finiti separatamente i due integrali

$$\int_{-1}^{0} g(t)dt, \qquad \int_{0}^{x} g(t)dt.$$

Sia ora $x < -1$: la funzione $G(x)$ é definita e positiva in $-2 < x < -1$. Dal confronto asintotico si ha ancora

$$L_{-2} := \lim_{x \to -2^+} G(x) = \int_{-1}^{-2} g(t)dt < +\infty.$$

Per $x < -2$ is ha quindi

$$G(x) = \int_{-1}^{-2} g(t)dt + \int_{-2}^{x} g(t)dt < \infty$$

dal cui concludiamo che il dominio di G é $\mathbb{I} = (-\infty, 0)$. In particolare

$$L_{-\infty} := \lim_{x \to -\infty} G(x) = \int_{-1}^{-2} g(t)dt + \int_{-2}^{-\infty} g(t)dt < \infty.$$

Per quel che concerne la derivabilitá, osserviamo che $G(x)$ é derivabile in $\mathbb{I} \setminus \{-2\}$ con derivata $G'(x) = g(x)$: in $x = -2$ la funzione presenta una cuspide, essendo

$$G'_+(-2) = \lim_{x \to 2^+} g(x) = -\infty, \qquad G'_-(-2) = \lim_{x \to 2^-} g(x) = +\infty.$$

Il segno di $g(x)$ determina la monotonia di G, che risulta esser quindi crescente in $(-\infty, -2)$ e decrescente in $(-2, 0)$. Anche in questo caso, la monotonia poteva esser dedotta da semplici considerazioni geometriche.

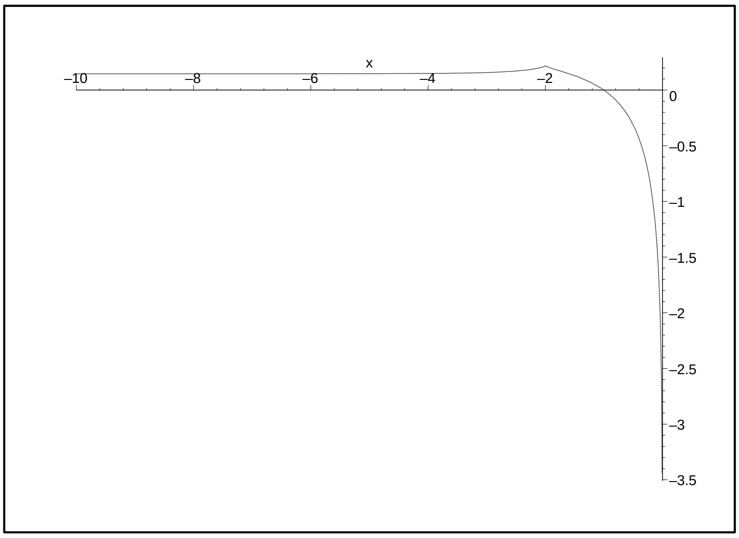

Figura 3: Grafico di (4).

Per concludere lo studio, rimane da studiare l'asintoto orizzontale in $-\infty$; in particolare, é necessario capire se la quota $L_{-\infty}$ sia o meno positiva. Questa informazione concluderebbe anche lo studio del segno.

<u>*Una possibile traccia:*</u> dal grafico di g, viene naturale scrivere

$$L_{-\infty} = I_1 - I_2, \qquad I_1 := -\int_{-2}^{-1} g(t)dt > 0, \qquad I_2 := \int_{-\infty}^{-2} g(t)dt > 0. \tag{6}$$

Si tratta allora di capire quale dei due addendi sia il maggiore. Consideriamo per primo I_1: in $(-2,-1)$ valgono le stime

$$\frac{1}{e^2} < e^t < \frac{1}{e}, \qquad\qquad \frac{1}{2} < \frac{1}{|t|} < 1,$$

dalle quali otteniamo per integrazione

$$\frac{3}{4e^2} < I_1 < \frac{3}{2e}. \tag{7}$$

Qualora volessimo dimostrare che $I_2 < \frac{3}{4e^2}$, cosicché $I_1 - I_2 > 0$, potrebbe esser utile procedere in due passi: infatti per sfruttare il diverso comportamento dell'integranda ai due estremi dell'intervallo, risulterebbe necessario dividere

$$I_2 = \int_{-\infty}^{-a} g(t)dt + \int_{-a}^{-2} g(t)dt = I_{2a} + I_{2b}.$$

con un opportuno valore di $a > 0$...

Esercizi proposti

1. Rappresentare graficamente la funzione integrale nel suo dominio

$$G(x) = \int_0^x \ln(1 + |t|)e^{-t^2} dt.$$

2. Rappresentare graficamente la funzione integrale nel suo dominio

$$G(x) = \int_0^x \ln(|t|) \left(1 - e^{-t^2}\right) dt.$$