

FISICA MATEMATICA I

Compito Scritto

8.9.10

- 1 Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = ax - y \end{cases}$$

Al variare del parametro reale $a > 0$, trovarne i punti critici e studiarne la stabilità (lineare e non).

- 2 Nello spazio, si consideri un sistema di assi cartesiani con asse z rivolto verso l'alto. Una particella pesante è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = -(x^2 + y^2)$. Una molla ideale collega la particella all'asse z . La molla resta sempre orizzontale.

2.1 Scrivere la Lagrangiana.

2.2 Trovare gli eventuali integrali primi e darne l'interpretazione fisica.

2.3 Passare al sistema ridotto e farne il ritratto di fase.

- 3 In un piano orizzontale O, x, y si considerino tre punti materiali A,B,C vincolati rispettivamente alle guide rettilinee di equazioni

$$r_A : y = 1, \quad r_B : y = 0, \quad r_C : y = -1;$$

i punti A e C hanno ugual massa M , mentre il punto B ha massa $m < M$. Il segmento AC deve rimanere sempre ortogonale alla guida r_B . Due molle collegano i punti A e C all'origine; altre due molle collegano i punti A e C al punto B. Ciascuna delle quattro molle ha costante elastica κ . Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile e fornirne il comportamento asintotico quando $m \rightarrow 0$.

- 4 Partendo dalla formulazione Lagrangiana delle equazioni del moto, enunciare e dimostrare le prime due leggi di Keplero.