

# FISICA MATEMATICA I

Compito Scritto

8.9.10

- 1 Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 4x^2 \\ \dot{y} = ax - y \end{cases}$$

Al variare del parametro reale  $a > 0$ , trovarne i punti critici e studiarne la stabilità (lineare e non).

- 2 Nello spazio, si consideri un sistema di assi cartesiani con asse  $z$  rivolto verso l'alto. Una particella pesante è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione  $z = -4(x^2 + y^2)$ . Una molla ideale collega la particella all'asse  $z$ . La molla resta sempre orizzontale.

2.1 Scrivere la Lagrangiana.

2.2 Trovare gli eventuali integrali primi e darne l'interpretazione fisica.

2.3 Passare al sistema ridotto e farne il ritratto di fase.

- 3 In un piano orizzontale  $O, x, y$  si considerino tre punti materiali A,B,C vincolati rispettivamente alle guide rettilinee di equazioni

$$r_A : y = -2, \quad r_B : y = 0, \quad r_C : y = 2;$$

i punti A e C hanno ugual massa  $M$ , mentre il punto B ha massa  $m < M$ . Il segmento AC deve rimanere sempre ortogonale alla guida  $r_B$ . Due molle collegano i punti A e C all'origine; altre due molle collegano i punti A e C al punto B. Ciascuna delle quattro molle ha costante elastica  $\kappa$ . Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile e fornirne il comportamento asintotico quando  $m \rightarrow 0$ .

- 4 Forma reale della soluzione generale dei sistemi lineari piani descritti da

$$\dot{x} = Ax,$$

con  $A$  matrice diagonalizzabile.