

FISICA MATEMATICA I
Compito Scritto - Versione D
16.11.10

1 Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + y - 3x^2 \\ \dot{y} = x - 3 \end{cases}$$

1.1 Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la natura.

1.2 Si tracci un sommario ritratto di fase del sistema.

2 Nello spazio, si consideri un sistema di assi cartesiani con asse z rivolto verso l'alto. Una particella pesante è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = \sin^2(x)$. Si richiede di:

2.1 scrivere la Lagrangiana e le equazioni di lagrange;

2.2 trovare gli eventuali integrali primi e darne l'interpretazione fisica;

2.3 fornire una descrizione qualitativa della dinamica.

2.4 Supponiamo che inizialmente il punto si trovi nell'origine degli assi con energia $E = 2mg$. Per quali valori di $\dot{y}(0)$ esiste un istante T tale che $x(T) > \frac{\pi}{2}$?

3 Si consideri un punto materiale P di massa M vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

e soggetto alla forza peso.

Si richiede di:

3.1 determinare gli equilibri e la loro natura,

3.2 calcolare le frequenze ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.

4 Il Teorema di Lagrange-Dirichlet sulla stabilità degli equilibri di sistemi Lagrangiani naturali.