

**FISICA MATEMATICA I**  
Compito Scritto - **Versione C**  
02.12.10

- 1 Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y + x - y^2 \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

- 1.1 Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la natura.  
1.2 Si tracci un sommario ritratto di fase del sistema.

- 2 Nello spazio, si consideri un sistema di assi cartesiani con asse  $z$  rivolto verso l'alto. Una particella pesante è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione  $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$ . Si richiede di:

- 2.1 scrivere la Lagrangiana e le equazioni di lagrange;  
2.2 trovare gli eventuali integrali primi e darne l'interpretazione fisica;  
2.3 tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto e fornire una descrizione qualitativa della dinamica.

- 3 In un sistema di riferimento  $\{O, x, y\}$ , con asse  $y$  verticale ascendente, si consideri un punto materiale pesante  $P$  di massa  $M$  vincolato a muoversi su una guida parabolica di massa trascurabile. Il vertice  $V$  della guida è vincolato ad un carrello di massa  $m$  libero di muoversi lungo l'asse  $y = 0$  e collegato mediante una molla di costante elastica  $\kappa$  all'origine degli assi. La guida, quando  $V \equiv O$ , ha equazione

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Si chiede di:

- 3.1 determinare gli equilibri e la loro natura;  
3.2 calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.

- 4 Enunciare e dimostrare il Teorema che lega la funzione di Lyapunov alla stabilità locale di un equilibrio di un sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x).$$