

Seconda prova intermedia di  
**Fisica Matematica I**

**Versione A**

17.06.10

**Esercizio 1**

Nello spazio, si consideri un sistema di assi cartesiani con asse  $z$  rivolto verso l'alto. Una particella pesante  $P$  di massa  $m = 1$  è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione

$$z + (x^2 + y^2)^3 = 0.$$

Una molla ideale di costante elastica  $\kappa = 1$  collega la particella all'asse  $z$ . *La molla resta sempre orizzontale.* Si richiede di:

1. scrivere la Lagrangiana;
2. trovare gli integrali primi e darne l'interpretazione fisica;
3. tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto;
4. per quali condizioni le traiettorie sono periodiche e mantengono la quota costante?

**Esercizio 2**

In un piano cartesiano verticale  $xy$  con asse  $y$  verticale ascendente, si consideri un'asta di massa trascurabile di lunghezza  $l = 2$  ai cui estremi sono vincolati due punti materiali **pesanti**  $A$  e  $B$  di massa rispettivamente  $M$  e  $m < M$ . Il punto medio  $C$  dell'asta è vincolato a muoversi lungo l'asse verticale  $x = 0$ . Una molla elastica di costante  $\kappa$  collega il punto  $A$  all'origine degli assi.

Si richiede di:

1. determinare  $\kappa^*$  tale che per  $\kappa < \kappa^*$  le uniche configurazioni di equilibrio siano quelle in cui i due punti siano allineati con l'origine degli assi;
2. nelle condizioni di cui sopra, studiare la stabilità degli equilibri e determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno all'equilibrio stabile.

**Quesito di teoria**

Dedurre le equazioni di Lagrange per una particella libera in  $\mathbb{R}^3$  soggetta solo a forze conservative: si consideri un sistema di coordinate arbitrario.