Esame di
Fisica Matematica I
21.01.10

Esercizio 1 (Modello di Lorentz)
Si consideri il sistema in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

dove $b > 0$.

1. Dopo aver verificato che l'origine è l'unico equilibrio del sistema, si risolva il problema di Cauchy delle equazioni del moto linearizzate e se ne deduca la stabilità secondo Lyapunov.
2. La dinamica del sistema originale è stabile/asintoticamente stabile secondo Lyapunov in un intorno dell'origine? Ed in tutto lo spazio?

Esercizio 2
Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi sulla guida liscia Γ di equazioni $\sin(x) - y = 0$. Sul sistema agisce la forza peso. Si richiede di:

1. scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
2. tracciare il ritratto di fase del sistema, motivando il comportamento delle orbite più significative.

Esercizio 3
In un sistema di riferimento $\{O, x, y\}$, con y verticale ascendente, si considerino due guide liscie di equazioni cartesiane

$$\mathcal{C}_1 : x = 0, \qquad \mathcal{C}_2 : x + y = 0.$$

Un punto materiale A di massa m è vincolato a muoversi sulla guida $\mathcal{C}_2$ ed è collegato all'origine O mediante una molla elastica di costante κ. Un'asta rigida di lunghezza l collega poi il punto A ad un carrello B libero di scorrere lungo la guida $\mathcal{C}_1$. Il carrello e l'asta hanno masse trascurabili. Infine si consideri un pendolo di lunghezza l e massa m che abbia in B il proprio punto di sospensione e la massa concentrata nel vertice C opposto a B. **Come coordinate lagrangiane si prendano l'angolo ϕ del pendolo misurato dalla verticale e l'angolo $\theta = O\hat{B}A$.**
Si richiede:

- dopo aver definito $\gamma := \frac{\kappa l}{mg}$, dimostrare che per $\gamma < 1$ esiste un solo equilibrio stabile e determinare $\overline{\gamma}$ in modo tale che tale equilibrio si trovi in $(\theta, \phi) = (\pi/6, 0)$;
- per tale valore di γ, calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile $(\pi/6, 0)$.

1 Traccia delle soluzioni

1.1 Esercizio 1

Il sistema ammette come equilibri il solo punto $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$. Infatti dalla prima si ottiene $x = y$ ed inserendola nella seconda si ha

$$xz = 0$$

che implica $z = 0$ oppure $x = 0$. In entrambi i casi, la terza equazione scritta nella forma $z = x^2$ fornisce come unico equilibrio l'origine.

Per la stabilità, linearizziamo il sistema attorno a tale equilibrio, ottenendo la matrice Jacobiana del campo

$$J^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Si osserva che la dinamica del piano x, y e quella della direzione z si disaccoppiano. Si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}, \qquad \dot{z} = -bz,$$

La soluzione del p.C. nella direzione z è

$$z(t) = z_0 e^{-bt},$$

mentre nel piano x, y si diagonalizza il sistema attraverso il cambio di coordinate dato dagli autovettori $u_{1,2}$ associati agli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \end{cases}$$

ottenendo

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 0 \\ \dot{\eta} = -2\eta. \end{cases}$$

La dinamica è linearmente stabile, ma non asintoticamente poiché la retta $x = y$ (associata a $\lambda_1 = 0$) risulta essere un attrattore.

La dinamica globale è invece asintoticamente stabile, come si deduce dalla derivata di Lie della funzione di Lyapunov $W(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

$$\mathcal{L}W = -(x - y)^2 - bz^2.$$

Tale derivata si annulla solo sulla retta $x - y = 0, z = 0$ che è sempre trasversale al campo.

1.2 Esercizio 3

Utilizzando le coordinate assegnate dal testo ed un pò di trigonometria si ottiene la parametrizzazione dei punti A, B, C

$$\begin{cases} A = (-l\sin(\theta), -l\sin(\theta)) \\ B = (0, -l(\sin(\theta) + \cos(\theta)) \\ C = (l\sin(\phi), -l\cos(\phi) - l(\sin(\theta) + \cos(\theta)) \end{cases}$$

da cui

$$\dot{A} = -l\dot{\theta}(\cos(\theta), \cos(\theta)), \qquad \dot{C} = (l\dot{\phi}\cos(\phi), l\dot{\phi}\sin(\phi) - l\dot{\theta}(\cos(\theta) - \sin(\theta))).$$

L'energia cinetica è composta dai due termini T_A e T_C

$$\begin{aligned} T_A &= ml^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta), \\ T_B &= \frac{1}{2}ml^2\left[\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2(1-\sin(2\theta)) - 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\phi)(\cos(\theta)-\sin(\theta))\right]. \end{aligned}$$

Il potenziale della forza peso risulta essere

$$V_g = -mlg(\cos(\phi) + \cos(\theta) + 2\sin(\theta)),$$

mentre quello della forza elastica dipende dalla distanza $|OA|^2$

$$V_\kappa = \kappa l^2 \sin^2\theta.$$

Quindi $\nabla V = 0$ se

$$\begin{aligned} \sin(\phi) &= 0, & (1) \\ mlg\left[\gamma\sin(2\theta) - 2\cos(\theta) + \sin(\theta)\right] &= 0. & (2) \end{aligned}$$

Dalla prima si ottiene $\phi = 0, \pi$. Sostituendo $\theta = \pi/6$ si ottiene $\gamma = 2 - \sqrt{3}/3$.

In tale configurazione l'Hessiana del potenziale risulta essere

$$B = \begin{bmatrix} mgl & 0 \\ 0 & mgl(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + \kappa l^2 \end{bmatrix}.$$

Il resto segue banalmente, essendo

$$G^{-1} = \frac{1}{ml^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene

$$C := G^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{g}{l}(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\kappa}{m} \end{bmatrix}$$

che contiene sulla diagonale gli autovalori, ovvero i quadrati delle frequenze.