Esame di
Fisica Matematica I
22.02.10

Esercizio 1 (Modello di Lorentz)
Si consideri il sistema in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = 3x - y - xz \\ \dot{z} = xy - 2z. \end{cases}$$

Determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità lineare secondo Lyapunov.

Esercizio 2
In un sistema di riferimento O, x, y, z con z asse verticale ascendente, si consideri un punto materiale **pesante** P di massa M vincolato a muoversi sulla superficie sferica liscia di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Si richiede:

1. di scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
2. sotto quali ipotesi sui dati iniziali le traiettorie passano per entrambi i poli della sfera?

Si suppponga che agisca anche una forza d'attrito $F_a = -\epsilon\dot{P}$, dove $\dot{P}$ rappresenta il **vettore velocità** ed $\epsilon > 0$. Si richiede:

1. di scrivere le nuove equazioni di Lagrange (*ricordarsi la definizione di forze generalizzate*);
2. esistono traiettorie **non di equilibrio** che mantengono la quota z costante per tutti i tempi? Motivare dettagliatamente la risposta.

Esercizio 3

In un sistema di riferimento $\{O, x, y\}$, con y verticale ascendente, un'asta rigida collega un punto materiale **pesante** P di massa m ad un punto materiale **pesante** Q di massa M vincolato ad una guida di equazioni parametriche

$$\mathcal{C} := \begin{cases} x = 2l\sin(\theta), \\ y = -2l\cos(\theta). \end{cases}$$

L'asta ha lunghezza l e massa trascurabile. Si chiede di calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile del sistema.

1 Traccia delle soluzioni

1.1 Esercizio 1

Il sistema ammette come equilibri i punti $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (2, 2, 2)$, $P_2 = (-2, -2, 2)$. Infatti dalla prima si ottiene $x = y$ ed inserendola nella seconda si ha

$$x(2 - z) = 0$$

che implica $z = 2$ oppure $x = 0$. Nei due casi, la terza equazione scritta nella forma $2z = x^2$ fornisce gli equilibri di cui sopra.

La Jacobiana risulta essere

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3-z & -1 & -x \\ y & x & -2 \end{bmatrix}.$$

Per la stabilità di P_0, linearizziamo il sistema attorno a tale equilibrio, ottenendo la matrice Jacobiana del campo

$$J_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si osserva che la dinamica del piano x, y e quella della direzione z si disaccoppiano. Si ottengono i seguenti autovalori

$$\lambda = \pm\sqrt{3} - 1, -2,$$

come radici del polinomio

$$\Phi(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 4.$$

Per la stabilità di P_1, linearizziamo il sistema attorno a tale equilibrio, ottenendo la matrice Jacobiana del campo

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si ottengono i seguenti autovalori

$$\lambda = \pm i\sqrt{3} - 1, -2,$$

come radici del polinomio

$$\Phi(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 8\lambda - 8.$$

La stabilità di P_2 è identica a quella di P_1 a causa della simmetria $(x, y) \mapsto (-x, -y)$.

1.2 Esercizio 2

Per la prima parte vedere dispense, Capitolo 8. Per la seconda parte, ricordiamoci della forma della base tangente alla sfera

$$\begin{cases} \partial P/\partial\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)u_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)u_x - \sin(\theta)u_z \\ \partial P/\partial\varphi = -\sin(\theta)\sin(\varphi)u_x + \sin(\theta)\cos(\varphi)u_y. \end{cases}$$

La forza F_a si riscrive come

$$F_a = -\epsilon\left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial P}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\right),$$

quindi le rispettive proiezioni su TS^2 risultano essere

$$\begin{aligned} Q_\theta := \langle F_a, \frac{\partial P}{\partial \theta}\rangle &= -\epsilon\dot{\theta}\left\|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right\|^2 = -\epsilon\dot{\theta}, \\ Q_\varphi := \langle F_a, \frac{\partial P}{\partial \varphi}\rangle &= -\epsilon\dot{\varphi}\left\|\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right\|^2 = -\epsilon\dot{\varphi}\sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Le equazioni di lagrange diventano

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\sin(2\theta) + g\sin(\theta) + \frac{\epsilon}{m}\dot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\varphi}\sin^2(\theta) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(2\theta) + \frac{\epsilon}{m}\dot{\varphi}\sin^2(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Con pochi passaggi si dimostra che non esistono soluzioni che soddisfano $\theta(t) = \theta_0$.

1.3 Esercizio 3

Le coordinate dei punti P e Q sono

$$\begin{cases} x = 2l\sin(\theta) + l\sin(\varphi), \\ y = -2l\cos(\theta) - l\cos(\varphi), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2l\sin(\theta), \\ y = -2l\cos(\theta), \end{cases}$$

dove φ rappresenta l'angolo tra l'asta e la verticale del punto di sospensione dell'asta, vincolato alla guida. Si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = 2l\dot{\theta}\cos(\theta) + l\dot{\varphi}\cos(\varphi), \\ \dot{y} = 2l\dot{\theta}\sin(\theta) + l\dot{\varphi}\sin(\varphi), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2l\dot{\theta}\cos(\theta), \\ \dot{y} = 2l\dot{\theta}\sin(\theta), \end{cases}$$

da cui l'espressionde dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}4Ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\left[4\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) + \dot{\varphi}^2\right]$$

e la rispettiva metrica materiale

$$G(\theta,\varphi) = l^2\begin{bmatrix} 4(m+M) & 2m\cos(\theta-\varphi) \\ 2m\cos(\theta-\varphi) & m \end{bmatrix}.$$

Il potenziale è

$$V = -mgl\left[(2+2\mu)\cos(\theta) + \cos(\varphi)\right].$$

Il resto segue banalmente dai conti: la matrice cinetica risulta

$$G(0,0) = l^2 m\begin{bmatrix} 4(1+\mu) & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mu := \frac{M}{m},$$

con inversa

$$[G(0,0)]^{-1} = \frac{1}{4l^2M}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4(1+\mu) \end{bmatrix}.$$

L'Hessiana è

$$B(0,0) = glm\begin{bmatrix} 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quindi i quadrati delle frequenze $\omega_{1,2}^2$ sono gli autovalori $\lambda_{1,2}$ della matrice

$$C = \left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)\frac{g}{l}\begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \gamma := \frac{1}{1+\mu}.$$