Prima prova intermedia di
Fisica Matematica I
22.04.10

Esercizio 1.
Si consideri il sistema conservativo del secondo ordine

$$\ddot{x} = -V'(x), \qquad V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2.$$

1. Tracciare il diagramma di fase del sistema nel piano $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$.
2. Approssimare la frequenza delle piccole oscillazioni (oscillazioni con energia prossima al minimo del potenziale) attorno alle eventuali posizioni di equilibrio stabile.
3. Supponiamo che sul sistema agisca anche una forza d'attrito proporzionale alla velocità

   $$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -V'(x) - \mu y, \qquad \mu > 0.$$

   Usando il Teorema di Lyapunov, discutere la stabilità (locale/globalem asintotica/non asintotica) del minimo assoluto.

Esercizio 2.
Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = -a^2 x + y^2, \\ \dot{y} = y(1 - x) \end{cases}$$

1. Al variare del parametro $a \neq 0$, si determinino i punti di equilibrio e se ne studino la linearizzazione e la stabilità non lineare (locale).
2. Si tracci il ritratto di fase del sistema per $a = 2$.

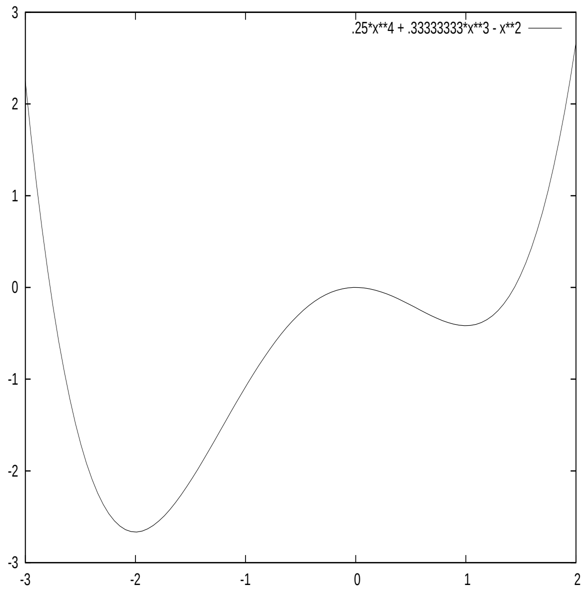

Figure 1: Potenziale V.

1 Traccia della soluzione

Esercizio 1.

Il potenziale é stazionario in $x = -2, 0, 1$, infatti

$$V'(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2),$$

quindi $x = -2, 1$ sono minimi locali mentre $x = 0$ é un massimo locale. Dei due minimi, $x = -2$ é assoluto. I minimi sono quadratici, infatti da

$$V''(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

segue che $V''(-2) = 6 > 0$ e $V''(1) = 3 > 0$. Questo consente di calcolare in fretta la frequenza delle piccole oscillazioni

$$\omega^2 = V''(x_{eq}).$$

Si prenda come funzione di Lyapunov l'energia meccanica

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

quindi

$$\mathcal{L}_F W = -\mu y^2 \leq 0, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

da cui la stabilità globale. Tale stabilità non é asintotica globalmente per il semplice motivo che esistono orbite che non tendono al minimo assoluto $x = -2$, per esempio i restanti due equilibri $x = 0, 1$.

Dal punto di vista locale, tale stabilità è invece asintotica, infatti l'equilibrio diventa prima un fuoco ed in seguito un nodo stabile. Sappiamo che tale stabilità rimane localmente anche per il sistema nonlineare (Primo TdL o Teorema sulla parte reale degli autovalori).

Osserviamo che, per dedurre tale proprietà direttamente dal (Secondo) TdL, è necessario passare alla rappresentazione della dinamica lineare in una base dedotta dagli autovettori complessi. Infatti, supponiamo di avere il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - 2\mu y; \end{cases}$$

dal TdL con funzione di Lyapunov $W = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ si ha solo $\mathcal{L}_F W = -2\mu y^2$, da cui non si puó dedurre la stabilità asintotica (a meno di dimostrare una versione più debole di tale teorema). Sappiamo però che, detto

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \qquad \omega := 1 - \mu^2$$

l'autovettore associato all'autovalore

$$\lambda = -\mu + \mathrm{i}\omega,$$

si può ottenere una base reale

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix}, \qquad v := \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

con rispettive coordinate ξ, η, rispetto alla quale il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\mu\xi + \omega\eta, \\ \dot{\eta} = -\omega\xi - \mu\eta, \end{cases}$$

da cui, scegliendo $W(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2\eta^2)$, si ottiene

$$\mathcal{L}_F W = -\mu(\xi^2 + \eta^2).$$

Esercizio 2.

Il sistema ammette come equilibri i punti $(x^*, y^*) = (0, 0)$, $(1, \pm a)$. Per la stabilità, linearizziamo il sistema attorno a tali equilibri, ottenendo la matrice Jacobiana del campo

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -a^2 & 2y \\ -y & 1 - x \end{bmatrix}.$$

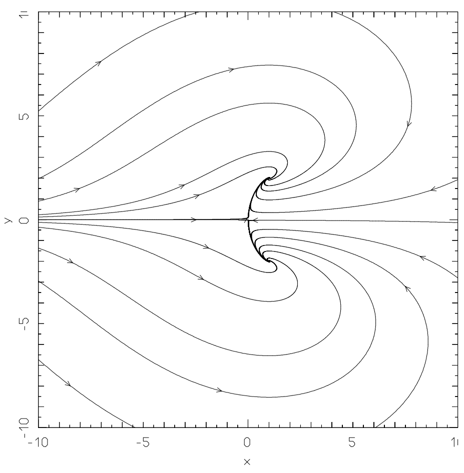

Figure 2: Ritratto di fase.

Nel caso dell'origine si ha

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ovvero l'asse $y = 0$ é autospazio instabile mentre quello $x = 0$ é stabile. Il punto di equilibrio é una **sella**. Nel caso del punto $(1, a)$ si ha

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a^2 & 2a \\ -a & 0 \end{bmatrix},$$

da cui risulta che

$$TrJ_1 = -a^2 < 0, \qquad detJ_1 = 2a^2 > 0,$$

che corrisponde ad una semiretta uscente dall'origine nel secondo quadrante del piano Traccia-Determinante. Quindi, per ogni valore non nullo del parametro, il punto è asintoticamente stabile per il sistema linearizzato: inizialmente tale equilibrio sarà un fuoco ed in seguito un nodo. I valori discriminanti si hanno per $a^2 = 8$. Per il sistema originale, il termine nonlineare non influisce sulla stabilità dell'equilibrio, almeno in un suo opportuno intorno.

Il sistema ammette la simmetria $(x, y) \mapsto (x, -y)$, quindi la natura di $(1, -a)$ é identica a quella di $(1, a)$.

Per il ritratto di fase si osservi, oltre alla simmetria, che $y = 0$ é varietá (stabile) invariante e che la sella ammette due orbite che escono dall'origine e sono tangenti all'asse $x = 0$. La concavità di tali orbite è data dal campo.

(Commento: bisognerebbe dimostrare anche che le orbite intersecano necessariamente la retta $x = 1$. Basta osservare che l'unico asintoto ammissibile è $x = 1$, ma se fosse $\lim_{x\to 1} y = +\infty$, allora si avrebbe $y'(x) \sim \frac{1-x}{y} \to 0$, assurdo.)