

FISICA MATEMATICA I
Compito Scritto - **Versione A**
02.12.10

1 Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y + x - y^2 \\ \dot{y} = x + 3 \end{cases}$$

1.1 Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la natura.

1.2 Si tracci un sommario ritratto di fase del sistema.

2 Nello spazio, si consideri un sistema di assi cartesiani con asse z rivolto verso l'alto. Una particella pesante è vincolata a muoversi sulla superficie di equazione $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$. Si richiede di:

2.1 scrivere la Lagrangiana e le equazioni di lagrange;

2.2 trovare gli eventuali integrali primi e darne l'interpretazione fisica;

2.3 tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto e fornire una descrizione qualitativa della dinamica.

3 In un sistema di riferimento $\{O, x, y\}$, con asse y verticale ascendente, si consideri un punto materiale pesante P di massa M vincolato a muoversi su una guida parabolica di massa trascurabile. Il vertice V della guida è vincolato ad un carrello di massa m libero di muoversi lungo l'asse $y = 0$ e collegato mediante una molla di costante elastica κ all'origine degli assi. La guida, quando $V \equiv O$, ha equazione

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Si chiede di:

3.1 determinare gli equilibri e la loro natura;

3.2 calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.

4 Dedurre le equazioni di Lagrange per una particella di massa m in R^3 , vincolata ad una superficie di equazioni $F(x, y, z) = 0$ e soggetta a forze conservative: si consideri un sistema di coordinate arbitrario.