

22 Giugno 2018

Versione A

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

☐ 26 Giugno

☐ 27 Giugno

☐ 28 Giugno

☐ 29 Giugno

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
 - Chi vuole sfruttare il **bonus** compitino, NON deve svolgere l'**esercizio 1** e DEVE scrivere che usa il bonus compitino.
-

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^3 . Dimostrare che, in generale, una forza centrale (i.e., $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x} = 0$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) non è necessariamente conservativa (è sufficiente esibire un controesempio, motivando la risposta).

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico in \mathbb{R}^2 descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(1 - x - \frac{1}{3}y \right) , \\ \dot{y} = y \left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x \right) , \end{cases}$$

Si richiede di:

- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- scrivere la soluzione del sistema linearizzato, in un intorno dell'origine, mediante l'esponenziale di matrice;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica;
- Mostrare che un punto di equilibrio è asintoticamente stabile nel **futuro**, esibendo una opportuna funzione di Lyapunov.
- Discutere l'evoluzione (nel futuro) di un generico dato iniziale (x_0, y_0) con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$.

Esercizio 2. Si consideri un sistema di riferimento $Oxyz$, con z asse verticale ascendente. Un punto materiale P_1 di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di centro l'origine O , raggio unitario e giacente nel piano orizzontale Oxy . Similmente, un punto materiale P_2 di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di centro l'origine O , raggio unitario e giacente nel piano verticale Oyz . I punti P_1 e P_2 sono collegati tra loro da una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare gli equilibri del sistema e la loro natura;
- (iii) determinare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno di eventuali posizioni di equilibrio stabile.
- (iv) scrivere la soluzione linearizzata, data dai modi normali, in un intorno di una posizione di equilibrio stabile.

Esercizio 3. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante P di massa m vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$z = -\frac{\varrho^6}{6} + \frac{\varrho^2}{2}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali costanti del moto e mostrare che il sistema è integrabile per quadrature;
- (iii) passare al sistema ridotto e studiarne la dinamica, tracciando anche il ritratto di fase ridotto;
- (iv) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.
- (v) determinare esplicitamente un dato iniziale che origina un'orbita periodica, motivando la risposta.