

11 Luglio 2018

Versione A

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

☐ 16 Luglio

☐ 17 Luglio

☐ 18 Luglio

☐ 19 Luglio

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
 - Chi vuole sfruttare il **bonus** competitivo, NON deve svolgere l'**esercizio 1** e DEVE scrivere che usa il bonus competitivo.
-

Esercizio 0. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -yz , \\ \dot{y} = xz , \\ \dot{z} = -xy . \end{cases}$$

Determinare esplicitamente due costanti del moto indipendenti (non banali).

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico in \mathbb{R}^2 descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - 8x^2 - 2y^2 , \\ \dot{y} = 6xy , \end{cases}$$

Si richiede di:

- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
 - scrivere la soluzione del sistema linearizzato, in un intorno di $(x, y) = (0, 1)$, mediante l'esponenziale di matrice;
 - tracciare il ritratto di fase, descrivendo come è stato ottenuto;
 - discutere la stabilità dei punti di equilibrio di tipo centro, dove la linearizzazione non è attendibile (Suggerimento: sfruttare eventuali simmetrie del sistema);
 - discutere l'evoluzione di un generico dato iniziale (x_0, y_0) con $y_0 > 0$.
-

Esercizio 2. Sia Oxy un sistema di riferimento, con y asse verticale ascendente. Un punto materiale P_1 di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida parabolica di equazione $y = x^2$. Similmente, un punto materiale P_2 di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida parabolica di equazione $y = -x^2$. I punti P_1 e P_2 sono collegati tra loro da una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare gli equilibri del sistema e la loro natura;
- (iii) determinare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno di una eventuale posizione di equilibrio stabile.
- (iv) scrivere la soluzione linearizzata, data dai modi normali, in un intorno di una posizione di equilibrio stabile.

Esercizio 3. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z asse verticale ascendente, si consideri un punto pesante P di massa m vincolato a muoversi su una superficie di equazione

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) .$$

Il punto P è inoltre sottoposto all'azione di una forza costante $\mathbf{F} = f\mathbf{i}$, $f \in \mathbb{R}$, essendo \mathbf{i} il versore dell'asse x . Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) nel caso $f \neq 0$, determinare eventuali posizioni di equilibrio e la loro natura;
- (iii) nel caso $f = 0$ determinare eventuali costanti del moto del sistema e mostrare che il sistema è integrabile per quadrature;
- (iv) sempre nel caso $f = 0$, studiare la dinamica del sistema ridotto e descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.
- (v) sempre nel caso $f = 0$, determinare esplicitamente un dato iniziale che origina un'orbita periodica, motivando la risposta.