

21 Novembre 2018

Versione A

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

26 Novembre

27 Novembre

28 Novembre

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Esercizio 0. Si consideri lo spazio \mathbb{R}^2 . Determinare se la forza

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - xy) ,$$

è conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y(y^2 - 1) , \\ \dot{y} = x(1 - y^2) . \end{cases}$$

Si richiede di

- determinare i punti stazionari e la loro natura (lineare);
- scrivere il flusso linearizzato a $O = (0, 0)$ mediante l'esponenziale di matrice;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema;
- sfruttando eventuali costanti del moto, determinare la natura non lineare dei punti di equilibrio.

Esercizio 2. Nello spazio \mathbb{R}^3 , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale $Oxyz$, con z asse verticale ascendente. Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$z = xy .$$

Il punto P è collegato all'origine O da una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità lineare al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{k}$;
- (iii) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile;
- (iv) Studiare le proprietà di stabilità delle posizioni di equilibrio nel caso critico, ovvero quando esse non sono riconosciute dalla parte lineare.

Esercizio 3. Si considerino due punti materiali di masse $m = 2$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\varrho) = \varrho^2 - \varrho^6$$

dove $\varrho = |r|$ e $r = r_1 - r_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti. Al variare del modulo del momento angolare $L \neq 0$, si richiede di:

- (i) scrivere le equazioni del moto nel sistema di riferimento del centro di massa, in modo da ricondursi ad un sistema a due gradi di libertà;
- (ii) in tale sistema di riferimento, determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica nel piano $(\varrho, \dot{\varrho})$;
- (iv) determinare sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.