

21 Novembre 2018

**Versione A**

Nome : .....

Cognome : .....

Matricola : .....

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

☐ 26 Novembre

☐ 27 Novembre

☐ 28 Novembre

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- 
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
  - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
  - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
  - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
- 

**Esercizio 0.** Si consideri lo spazio  $\mathbb{R}^2$ . Determinare se la forza

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - xy) ,$$

è conservativa e, nel caso lo sia, determinare il potenziale corrispondente.

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y(y^2 - 1) , \\ \dot{y} = x(1 - y^2) . \end{cases}$$

Si richiede di

- determinare i punti stazionari e la loro natura (lineare);
- scrivere il flusso linearizzato a  $O = (0, 0)$  mediante l'esponenziale di matrice;
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema;
- sfruttando eventuali costanti del moto, determinare la natura non lineare dei punti di equilibrio.

**Esercizio 2.** Nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale  $Oxyz$ , con  $z$  asse verticale ascendente. Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$z = xy .$$

Il punto  $P$  è collegato all'origine  $O$  da una molla ideale di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità lineare al variare del parametro  $\lambda = \frac{mg}{k}$ ;
- (iii) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile;
- (iv) Studiare le proprietà di stabilità delle posizioni di equilibrio nel caso critico, ovvero quando esse non sono riconosciute dalla parte lineare.

**Esercizio 3.** Si considerino due punti materiali di masse  $m = 2$ , che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\varrho) = \varrho^2 - \varrho^6$$

dove  $\varrho = |r|$  e  $r = r_1 - r_2$  è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti. Al variare del modulo del momento angolare  $L \neq 0$ , si richiede di:

- (i) scrivere le equazioni del moto nel sistema di riferimento del centro di massa, in modo da ricondursi ad un sistema a due gradi di libertà;
- (ii) in tale sistema di riferimento, determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (iii) descrivere qualitativamente la dinamica nel piano  $(\varrho, \dot{\varrho})$ ;
- (iv) determinare sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.