Esercizio 1. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y \ , \\ \dot{y} = 3 - 2x - y^2 \ . \end{cases}$$

Si richiede di

(i) determinare una costante del moto.
Cerchiamo una $\Phi(x, y)$ tale che

$$\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \ , \qquad \dot{y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \ .$$

Integrando la prima otteniamo

$$\Phi(x, y) = \int (2xy - 2y) \, \mathrm{d}y = xy^2 - y^2 + f(x) \ ,$$

che derivata e sostituita nella seconda diventa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y^2 + f'(x) = y^2 + 2x - 3 \ ,$$

da cui otteniamo $f(x) = x^2 - 3x$, dunque

$$\Phi(x, y) = xy^2 - y^2 + x^2 - 3x + c \ .$$

(ii) determinare eventuali equilibri e la loro natura (lineare e nonlineare);

$$\begin{cases} 2xy - 2y = 2y(x - 1) = 0 \ , \\ 3 - 2x - y^2 = 0 \ . \end{cases}$$

Per $y = 0$ abbiamo $x = \frac{3}{2}$, mentre per $x = 1$ otteniamo $y = \pm 1$. Abbiamo quindi tre punti di equilibrio

$$P_1 = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \ , \quad P_2 = (1, 1) \ , \quad P_3 = (1, -1) \ .$$

Per la natura lineare consideriamo la matrice Jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2 \\ -2 & -2y \end{pmatrix} \ .$$

Valutiamo la matrice Jacobiana nei punti di equilibrio.

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad \text{da cui } \lambda^2 + 2 = 0, \ \lambda = \pm i\sqrt{2}, \ \text{centro (non attendibile).}$$

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \ , \quad \text{da cui } \lambda^2 - 4 = 0, \ \lambda = \pm 2, \ \text{sella (attendibile).}$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad \text{da cui } \lambda^2 - 4 = 0, \ \lambda = \pm 2, \ \text{sella (attendibile).}$$

La linearizzazione, per il punto P_1, non è attendibile, tuttavia data la presenza di una costante del moto, possiamo valutare la matrice Hessiana in P_1 (che abbiamo sostanzialmente già calcolato)

$$H_\Phi(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Poichè l'Hessiana è definita positiva, P_1 è un punto di minimo per Φ e grazie al teorema di Lyapunov concludiamo che P_1 è un punto di equilibrio stabile (centro non lineare).

(iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase;

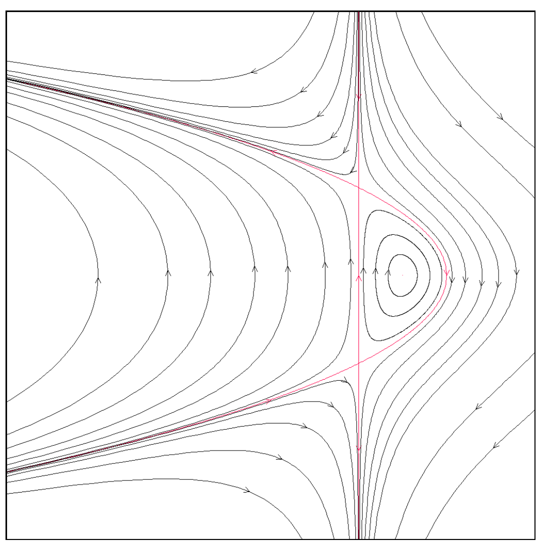
Per studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase, valutiamo la costante dei moto sui punti di equilibrio *instabili*.

$$\Phi(P_2) = \Phi(P_3) = -2 + c.$$

Poniamo quindi per comodità $c = 2$ e studiamo l'insieme $\Gamma_0 = \Phi^{-1}(0)$ che possiamo banalmente fattorizzare come

$$\Gamma_0 = \left\{(x, y) : (x - 1)(x + y^2 - 2) = 0\right\} .$$

La retta $x = 1$ è quindi una retta invariante, come anche la parabola $x = -y^2 + 2$. È quindi immediato tracciare il ritratto di fase, dove l'orientazione delle orbite si deduce immediatamente studiando il segno del campo vettoriale (in effetti è sufficiente studiare i versi di percorrenza sulle due curve di livello appena descritte).



(iv) determinare i dati iniziali che originano orbite periodiche.

I dati iniziali sono tutti e soli i dati iniziali contenuti nell'area compresa tra le due curve di livello e contenente il punto P_1, in formule

$$\left\{(x, y) : 1 < x < 2 \cap x < -y^2 + 2\right\}$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2) \ , \\ \dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2) \ . \end{cases}$$

Si richiede di:

(i) determinare eventuali punti stazionari e la loro natura;

$$\begin{cases} \quad x + y - x(x^2 + y^2) = 0 \ , \\ -x + y - y(x^2 + y^2) = 0 \ . \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $x = 0$, $y = 0$. Abbiamo un solo punto di equilibrio $P_0 = (0, 0)$.

Per studiarne la natura calcoliamo la matrice Jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} \ ,$$

che valutata in P_0 è

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad \text{da cui } \lambda = 1 \pm i, \ \text{FUOCO INSTABILE (attendibile).}$$

(ii) scrivere il flusso linearizzato attorno ad uno dei punti di equilibrio mediante l'esponenziale di matrice;

L'esponenziale di matrice è del tutto banale in quanto la matrice è già in forma canonica:

$$\exp t \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

Quindi il flusso linearizzato corrispondente al dato iniziale $(x_0, y_0) \in \mathscr{B}_\varepsilon(P_0)$ (per ε abbastanza piccolo) è dato da

$$\begin{aligned} x_t &= \quad x_0 e^t \cos t + y_0 e^t \sin t \ , \\ y_t &= -x_0 e^t \sin t + y_0 e^t \cos t \ . \end{aligned}$$

(iii) determinare se uno dei punti di equilibrio è asintoticamente stabile (nel futuro o nel passato), esibendo un'opportuna funzione di Lyapunov;

Consideriamo la solita funzione di Lyapunov $\Psi = \frac{x^2+y^2}{2}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \dot{y} \\ &= x\big(x + y - x(x^2 + y^2)\big) + y\big(-x + y - y(x^2 + y^2)\big) \\ &= x^2 + y^2 - x^2(x^2 + y^2) - y^2(x^2 + y^2) > 0 \qquad \text{in } \mathscr{B}_\varepsilon(P_0) \ , \end{aligned}$$

naturalmente per ε abbastanza piccolo. Quindi per il Teorema di Lyapunov P_0 è asintoticamente stabile nel passato.

(iv) tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema. Inoltre, discutere l'esistenza di eventuali orbite periodiche.

Dovendo studiare un fuoco, e vista la forma del sistema, è comodo passare alle coordinate polari:

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \ , \quad r\dot{\vartheta} = \dot{y}\cos\vartheta - \dot{x}\sin\vartheta \ ,$$

da cui otteniamo immediatamente

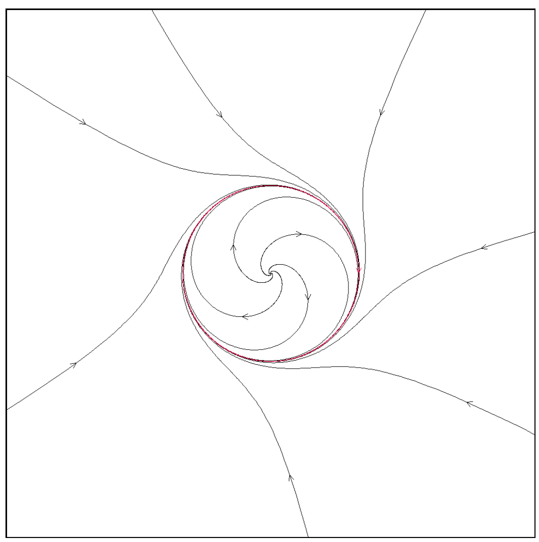
$$\dot{r} = r(1 - r^2) \ , \quad \dot{\vartheta} = -1 \ .$$

Le equazioni risultano disaccoppiate, possiamo studiare separatamente l'equazione radiale per r e quella angolare per ϑ.

(1) per $r < 1$, $\dot{r} > 0$ (in un intorno dell'origine lo sapevamo già dalla linearizzazione). Tutti i dati iniziali (r_0, ϑ_0) contenuti nel cerchio unitario hanno un comportamento simile ad un fuoco instabile, ma sono interamente contenuti nel cerchio unitario. Nello specifico $\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 1$ e tutte le orbite sono percorse in senso orario.

(2) per $r = 1$ abbiamo un'orbita periodica percorsa con velocità angolare costante: moto circolare uniforme.

(3) per $r > 1$, $\dot{r} < 0$. Tutti i dati iniziali (r_0, ϑ_0) esterni al cerchio unitario hanno un comportamento simile: $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 1$; per r grandi invece abbiamo $r \propto -r^3$, quindi la soluzione radiale diverge in un tempo finito $t^*(r_0)$ ed abbiamo $\lim_{t\to t^*(r_0)} r(t) = +\infty$, $\vartheta(t^*(r_0)) = \vartheta_0 - t^*(r_0)$.



Esercizio 3. Si consideri il sistema meccanico monodimensionale che descrive un punto di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \; .$$

Si richiede di:

(i) scrivere l'equazione del moto (del secondo ordine), il sistema dinamico associato e mostrare l'esistenza di una costante del moto non banale;

$$\ddot{x} = -V'(x) = \frac{x^2}{2} - x \; , \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{x^2}{2} - x \end{cases}$$

L'energia meccanica è una costante del moto, infatti

$$E = \frac{y^2}{2} + V(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{E} = y\dot{y} + V'(x)\dot{x} = -yV'(x) + V'(x)y = 0 \; .$$

(ii) determinare eventuali equilibri e studiarne la natura (non-lineare);

$$\frac{x^2}{2} - x = 0$$

Abbiamo due punti di equilibrio

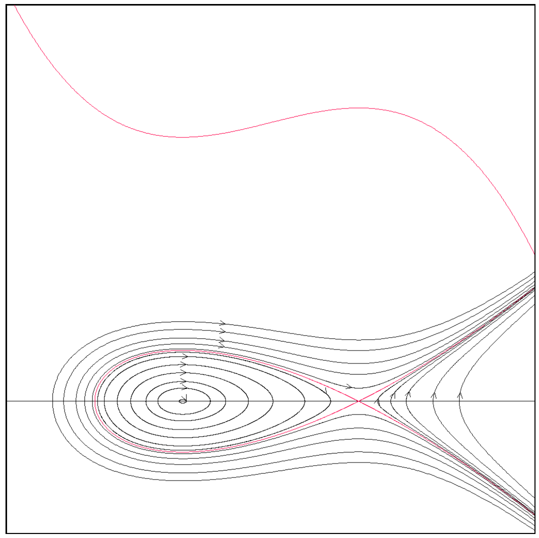
$$P_0 = (0,0) \; , \quad P_1 = (2,0) \; .$$

Calcoliamo direttamente la stabilità non lineare dei punti di equilibrio. Ci basta calcolare la derivata seconda del potenziale $V''(x) = 1 - x$ e valutarla nei punti di equilibrio:

- $V''(0) = 1$, 0 è un minimo (locale) del potenziale e quindi P_0 un punto di equilibrio stabile (centro non lineare);
- $V''(2) = -1$, 2 è un massimo (locale) del potenziale e quindi P_1 un punto di equilibrio instabile (sella non lineare);

(iii) studiare qualitativamente l'andamento delle orbite nel piano di fase descrivendo dettagliatamente la dinamica del sistema;

Riportiamo nel grafico l'andamento del potenziale e alcune orbite corrispondenti a diversi livelli di energia. Nel piano di fase, in rosso, sono riportate le separatrici (2 orbite asintotiche e 1 omoclina) corrispondenti al punto di massimo relativo del potenziale. La discussione dettagliata è lasciata per esercizio.



(iv) determinare la frequenza delle piccole oscillazioni nell'intorno di un eventuale punto di equilibrio stabile.

P_0 è l'unico punto di equilibrio stabile, e le frequenze delle piccole oscillazioni sono date da

$$\omega = \sqrt{V''(0)} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

(v) dare una stima inferiore e superiore per il moto che fa seguito al dato iniziale

$$x(0) = 0 \ , \qquad \dot{x}(0) = \frac{1}{2} \ .$$

Il dato iniziale corrisponde ad un valore di energia $E = 1/8$, e poiché $x_0 = 0$ siamo all'interno della buca: il moto è effettivamente periodico, $x \in [x_-, x_+]$.

Proviamo a stimare l'intervallo di oscillazione, ovvero i valori x_- ed x_+ per tentativi,

$$E - V(-0.47) < -0.002 \ , \quad E - V(+0.56) < -0.002 \ .$$

Abbiamo già calcolato $V''(x) = 1 - x$, che è monotona decrescente, quindi

$$V''(+0.56) < V''(x) < V''(-0.47) \ , \qquad x \in [x_-, x_+] \ .$$

La stima inferiore e superiore per il periodo di oscillazione è quindi immediata

$$5.1 < \frac{2\pi}{\sqrt{V''(-0.47)}} < T < \frac{2\pi}{\sqrt{V''(+0.56)}} < 9.5 \ .$$

Quindi $T = 7.3 \pm 2.2$ con un errore inferiore al 35%.