

12 Settembre 2018

Versione A

Nome : .....

Cognome : .....

Matricola : .....

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

☐ 18 Settembre

☐ 19 Settembre

☐ 20 Settembre

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- 
- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
  - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
  - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
  - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
- 

**Esercizio 0.** Si consideri un sistema di riferimento  $Oxy$  con  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  versori associati agli assi cartesiani. Determinare se la forza  $\mathbf{F} = (2x^3y^4 + x)\mathbf{i} + (2x^4y^3 + y)\mathbf{j}$  è conservativa.

Sia  $\gamma$  la curva di equazione parametrica

$$(t \cos(\pi t) - 1)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1 ,$$

calcolare il lavoro compiuto dalla forza lungo tale cammino.

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 - 1) , \\ \dot{y} = x(x^2 - 1) . \end{cases}$$

Si richiede di

- (i) determinare i punti stazionari e la loro natura (lineare);
- (ii) scrivere il flusso linearizzato a  $O = (0, 0)$  mediante l'esponenziale di matrice;
- (iii) tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica del sistema;
- (iv) determinare la natura nonlineare dei punti di equilibrio.

**Esercizio 2.** Nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale  $Oxyz$ , con  $z$  asse verticale ascendente. Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi sulla superficie cilindrica di equazione

$$x^2 + y^2 = 1 .$$

Il punto  $P$  è collegato all'origine  $O$  da una molla ideale di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Inoltre, tale punto è sottoposto ad una forza di potenziale  $V_\alpha(x, y, z) = \alpha yz$ , con  $\alpha \geq 0$ . Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità lineare al variare del parametro  $\lambda = \frac{mg}{\alpha}$ ;
- (iii) Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni e la soluzione linearizzata, data dai modi normali, attorno ad una posizione di equilibrio stabile;
- (iv) Posto  $\alpha = 0$ , si determini esplicitamente la soluzione corrispondente ai seguenti dati iniziali

$$x(0) = 1 , \quad \dot{x}(0) = 0 , \quad y(0) = 0 , \quad \dot{y}(0) = 1 , \quad z(0) = -\frac{mg}{k} , \quad \dot{z}(0) = 0 ,$$

**Esercizio 3.** Due punti pesanti  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m$ , sono vincolati a muoversi in un piano verticale  $Oxy$ , con  $y$  asse verticale ascendente. I punti sono collegati tra loro da un'asta ideale rigida di lunghezza  $2l > 0$ . Inoltre, il punto  $P_1$  è collegato tramite due molle di costante elastica  $k > 0$  a due pioli *fissi* posti rispettivamente in  $(a, b)$  e  $(a, -b)$ , con  $a, b > 0$ . Analogamente, il punto  $P_2$  è collegato tramite due molle di costante elastica  $k > 0$  a due pioli *fissi* posti rispettivamente nei punti  $(-a, b)$  e  $(-a, -b)$ , sempre con  $a, b > 0$ . Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare gli equilibri del sistema e la loro natura;
- (iii) determinare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della posizione di equilibrio stabile.