

30 Dicembre 2018

Versione A

Nome :

Cognome :

Matricola :

Orale (barrare i giorni in cui **NON** è possibile sostenere l'esame orale)

☐ 1 Febbraio

☐ 4 Febbraio

Scritto di **Fisica Matematica 1**

- Tempo a disposizione: **180 minuti**.
 - Riportare nome, cognome, matricola e versione del compito su **tutti** i fogli.
 - Scrivere in modo chiaro, gli elaborati illeggibili **non** saranno corretti.
 - L'esercizio 0 è **necessario** per il superamento della prova.
-

Autorizzo, ai sensi del D.Lgs. 196/2003 e del GDPR 679/16, la pubblicazione online dell'esito.

Firma.....

Esercizio 0. Data l'equazione

$$\ddot{x} = \sin(x) \cos(x) ,$$

determinare una costante del moto, motivando la risposta.

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - x)(1 - x - y) , \\ \dot{y} = x(2 + y) . \end{cases}$$

Si richiede di:

- determinare eventuali punti di equilibrio e la loro natura;
- scrivere esplicitamente il flusso linearizzato attorno all'origine utilizzando l'esponenziale di matrice, motivando accuratamente i passaggi.
- mostrare che il punto $P_1 = (0, 1)$ è asintoticamente stabile (per il sistema non-lineare).
- tracciare il ritratto di fase e discutere qualitativamente la dinamica.

Esercizio 2. Nello spazio \mathbb{R}^3 , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale $Oxyz$, con z asse verticale ascendente. Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi su una sfera di raggio R centrata nell'origine O . Il punto P è collegato al polo nord $N = (0, 0, R)$ della sfera da una molla ideale di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri;
- (iii) determinare eventuali costanti del moto;
- (iv) passare al sistema ridotto e studiarne la dinamica, tracciando anche il ritratto di fase ridotto;
- (v) descrivere qualitativamente la dinamica del sistema completo.

Esercizio 3. Nello spazio \mathbb{R}^2 , si consideri un sistema di riferimento fisso ortonormale Oxy , con y asse verticale ascendente. Due punti materiali A e B , di massa uguale m , sono liberi di muoversi nel piano verticale e sono collegati tra loro mediante una molla. Due punti ideali C e D sono fissati, a distanza d tra loro, lungo l'asse x . Il punto A è collegato al punto C da una molla e similmente anche il punto B è collegato al punto D da una molla. Tutte le molle sono ideali, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si richiede di:

- (i) scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
- (ii) determinare eventuali punti di equilibrio e discuterne la stabilità;
- (iii) determinare le soluzioni linearizzate, date dai modi normali, per le equazioni del moto;
- (iv) determinare le soluzioni per le equazioni del moto e confrontarle con le soluzioni linearizzate.