INFORMAZIONI SUL CORSO DI

FISICA MATEMATICA 4

(Prof. Livio Pizzocchero, a.a. 2011/12, 2^0 semestre)

Il corso di Fisica Matematica 4 (FM4) è fortemente consigliato agli studenti del corso di laurea triennale in Matematica che, in vista del passaggio alla laurea magistrale in Matematica, vogliono approfondire le loro conoscenze nel settore della Fisica Matematica.

Le finalità e i contenuti del corso sono simili a quelli del corso di Fisica Matematica 2 (FM2) per il vecchio ordinamento F50; tuttavia, alcune parti del vecchio FM2 (soprattutto quelle iniziali) saranno tagliate, e la prova d'esame sarà significativamente alleggerita (si vedano le voci successive "Materiale didattico" e "Modalità d'esame").

Il corso di FM4 è una introduzione ai *metodi geometrici della Fisica Matematica.* Oltre a sviluppare un linguaggio di tipo geometrico-differenziale, il corso ne presenta diverse applicazioni alla Fisica Matematica: in particolare, illustra in questo stile il *formalismo lagrangiano* e quello *hamiltoniano.* Altre applicazioni sono indicate solo occasionalmente in FM4; tra queste, la *teoria della relatività.* In sostanza:

i) il corso di FM4 introduce alcuni strumenti geometrici, in particolare il *calcolo tensoriale sulle varietà.* Questi sono utili per la Fisica Matematica, ma dotati anche di interesse intrinseco.

ii) In FM4, tali strumenti sono usati per riproporre ad un livello più avanzato, ed integrare, la teoria dei sistemi lagrangiani introdotta nel corso di FM2. Nello stesso stile viene costruito (praticamente partendo da zero) il formalismo hamiltoniano.

iii) Il corso di FM4 fornisce una preparazione utile per seguire alcuni insegnamenti del corso di laurea magistrale in Matematica, tra cui il corso di *Sistemi hamiltoniani* e quello di *Teoria della relatività 1.* Esso può servire anche a studenti con interessi prevalenti nel settore della geometria differenziale, che in questo corso troveranno l'occasione per vedere tale disciplina applicata alla fisica.

Collegamenti con altri corsi della laurea triennale.

Negli appunti utilizzati per il corso di FM4, scritti dal docente, si presuppongono le conoscenze sul formalismo lagrangiano fornite dal corso di FM1. Invece, negli stessi appunti il formalismo hamiltoniano viene costruito ab initio.

A questo proposito conviene fare un commento relativo al corso di FM3 dove la teoria dei sistemi hamiltoniani viene introdotta ad un livello più elementare, senza usare concetti di tipo geometrico-differenziale.

Per come è impostato, il corso di FM4 può essere seguito anche da studenti che non abbiano seguito FM3, e non sappiano nulla dei sistemi hamiltoniani.

Gli studenti che seguiranno FM4 dopo FM3 troveranno più facile la parte sui sistemi hamiltoniani ma, presumibilmente, non si annoieranno: il linguaggio dei due corsi è molto diverso.

Qualche informazione in più sui contenuti del corso.

Il linguaggio geometrico di FM4 si basa sulle nozioni seguenti (tutti definite partendo da zero, all'interno del corso stesso):
i) il concetto di *tensore* su uno spazio vettoriale (reale, finito-dimensionale) $\mathcal{V}$. Con ciò si intende, sostanzialmente, una forma multilineare definita su un prodotto di copie di $\mathcal{V}$ e/o del suo duale $\mathcal{V}^*$.
ii) Il concetto di *varietà differenziale* m-dimensionale. Con ciò si intende, sostanzialmente, un insieme $\mathcal{M}$ che si può coprire "a pezzi" con sistemi di m coordinate reali (esempi di varietà sono le curve, di dimensione $m = 1$, o le superfici, di dimensione $m = 2$). Una varietà $\mathcal{M}$ possiede, in ogni suo punto M, uno *spazio tangente* $T_M\mathcal{M}$, che è uno spazio vettoriale.
iii) Il concetto di *campo tensoriale* su una varietà $\mathcal{M}$. Con ciò si intende una funzione

$$F : M \in \mathcal{M} \mapsto F_M \text{ tensore sullo spazio tangente } T_M\mathcal{M} \, .$$

Tanto per fare un esempio, nella *meccanica lagrangiana* ci sono due varietà interessanti:

a) Lo *spazio $\mathcal{C}$ delle posizioni, o configurazioni* permesse al sistema meccanico in esame, le cui coordinate si indicano di solito con $q = (q^i)_{i=1,\dots,n}$.

b) Il cosiddetto *fibrato tangente $T\mathcal{C}$* (lo spazio delle coppie "posizione e velocità"), per il quale si usano di solito le coordinate $(q, \dot{q}) = (q^i, \dot{q}^i)_{i=1,\dots,n}$.

Inoltre:

c) dal punto di vista geometrico, la lagrangiana è una funzione

$$L : T\mathcal{C} \to \mathbf{R} \ .$$

d) Sulla varietà $\mathcal{M} := T\mathcal{C}$ è definito un campo tensoriale Ω, che si chiama la *forma simplettica* indotta da L. Ω è un *campo di forme bilineari antisimmetriche* (o 2-*forma*; $\Omega : M \in \mathcal{M} \mapsto \Omega_M \in Lin_{2,A}(T_M\mathcal{M}, \mathbf{R})$), con specifiche proprietà. In coordinate $(q, \dot{q})$,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i \ , \qquad p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ .$$

(Il significato di questa rappresentazione, a cominciare dai simboli dq^i, dp_i e $\wedge$, viene spiegato all'interno del corso.)

e) Il *flusso Φ del sistema lagrangiano preserva* Ω, cioè

$$\Phi_t^* \Omega = \Omega$$

ad ogni istante t. (Il significato di questa formula, contenente il simbolo * di *pull back*, è anch'esso chiarito durante il corso.)

f) Quanto detto in d)e) ha una formulazione più chiara e naturale dal punto di vista *hamiltoniano* (dove la varietà più interessante è il cosiddetto *fibrato cotangente* $T^*\mathcal{C}$. Ad esempio, la Ω menzionata prima è la controparte di una 2-forma naturalmente definita su $T^*\mathcal{C}$).

g) L'invarianza di Ω sotto il flusso del sistema lagrangiano ha questa sorprendente conseguenza: *dato uno stato iniziale (posizione e velocità) in* $T\mathcal{C}$ (e supposto compatto l'insieme di livello dell'energia), *dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema tornerà arbitrariamente vicino allo stato iniziale.*

Questa affermazione è un caso particolare del cosiddetto "teorema di ricorrenza di Poincaré", illustrato durante il corso insieme alle sue implicazioni fisiche.

Materiale didattico.

Per l'a.a. 2011/12, il testo di base per il corso di FM4 sono gli appunti di FM2 del 2010/11 (disponibili sul sito del docente: percorso Didattica → Pagine per gli studenti di FM2 vecchio ord.). A questa informazione si aggiungono alcune avvertenze:

i) nell'uso degli appunti citati, gli studenti *non devono scoraggiarsi per il grande numero di pagine!* L'intenzione del docente è fornire delle informazioni il più possibile complete, ma non è detto che all'esame si debba sapere tutto!

ii) Le ore di lezione previste per FM4 sono meno di quelle del vecchio corso di FM2; per questo motivo, nell'esposizione degli appunti si taglieranno diverse parti, soprattutto nel Capitolo iniziale.

iii) Un'altra cosa già detta: gli appunti citati non presuppongono conoscenze preliminari riguardo al formalismo hamiltoniano.

iv) In caso di manifesto interesse da parte degli studenti, il docente potrebbe aggiungere qualche integrazione alla parte degli appunti relativa al formalismo hamiltoniano. (Ad esempio, una dimostrazione geometrica del teorema di Arnold-Liouville sull'integrabilità dei sistemi hamiltoniani, basata sulla teoria dell'omologia.)

Modalità d'esame.

L'esame di FM4 sarà solo orale. Almeno una parte dell'orale sarà su argomenti a scelta dello studente (tratti dai già citati appunti di FM2 v.o.); tuttavia, gli argomenti scelti dovranno essere preventivamente approvati dal docente. Per questo motivo, gli studenti interessati sono invitati a contattare il docente prima di cominciare la preparazione dell'esame.

Programma dettagliato. Sul sito del CCD di Matematica saranno pubblicati prossimamente i programmi di tutti i corsi, compreso il presente corso di FM4.

Provvisoriamente, qui di seguito si riporta il programma dettagliato del corso di FM2 a.a. 2010/11, molto vicino a quello di FM4 per l'a.a. 2011/12.

a) Preliminari geometrici. Richiami sugli spazi vettoriali e affini, e sulle applicazioni lineari e multilineari. Prodotto tensore di spazi vettoriali. Prodotto tensore simmetrizzato ed antisimmetrizzato. Topologia naturale di uno spazio vettoriale o affine finito- dimensionale. Spazi vettoriali orientati; applicazioni fisiche del concetto di orientazione. Richiami sugli spazi euclidei. Alcuni risultati sugli spazi euclidei di dimensione due e tre. Definizione di varietà differenziale. Spazio tangente e cotangente in un punto di una varietà. Fibrato tangente e cotangente. Fibrati tensoriali. Mappe tra varietà: applicazione tangente. Pull back e push forward dei campi tensoriali. Flusso di un campo vettoriale su una varietà; derivata di Lie. Commutatore tra campi vettoriali. Varietà orientate. Forme differenziali su una varietà; differenziale esterno. Integrazione delle forme differenziali; teorema di Stokes. Forme differenziali (di ordine qualunque) chiuse ed esatte. Cenni di teoria dell'omologia sulle variet'a. Varietà riemanniane.

b) Meccanica lagrangiana su varietà. Richiami di meccanica lagrangiana, nella formulazione in coordinate; motivazioni per una riformulazione intrinseca. Concetto di sistema lagrangiano come una coppia formata da una varietà $\mathcal{C}$ e da una funzione lagrangiana L sul fibrato tangente $T\mathcal{C}$. Lo spazio delle accelerazioni di $\mathcal{C}$. La derivata fibrata di L. Definizione di differenziale lagrangiano, e formulazione intrinseca delle equazioni di Lagrange; deduzione della legge di conservazione dell'energia dalla precedente formulazione intrinseca. Introduzione ai principi variazionali: varieta' di mappe, funzionali, variazione di un funzionale. Il principio variazionale di Hamilton per un sistema lagrangiano. Simmetrie della lagrangiana e costanti del moto: il teorema di Noether. Formalismo lagrangiano per una particella carica in un campo elettromagnetico.

c) Meccanica hamiltoniana su varietà. Le equazioni di Lagrange come campo vettoriale su $T\mathcal{C}$. La trasformazione di Legendre tra $T\mathcal{C}$ e il fibrato cotangente $T^*\mathcal{C}$. La 1-forma fondamentale e la forma simplettica della varietà $T^*\mathcal{C}$. Dalle equazioni di Lagrange su $T\mathcal{C}$ alle equazioni di Hamilton su $T^*\mathcal{C}$. Definizione generale di varietà simplettica. Sistemi di coordinate canoniche; teorema di Darboux. Forma simplettica di una varietà riemanniana bidimensionale ed orientata. Definizione generale di sistema hamiltoniano su una varietà simplettica. Parentesi di Poisson. Costanti del moto dei sistemi hamiltoniani. Invarianza della forma simplettica e della misura da essa indotta rispetto al flusso hamiltoniano (teorema di Liouville). Il teorema di ricorrenza di Poincaré sui sistemi dinamici in cui l'evoluzione temporale preserva una misura positiva finita. I sistemi hamiltoniani completamente integrabili; teorema di Liouville-Arnold sulla costruzione delle coordinate angolo-azione. Cenni sulle relazioni tra il formalismo hamiltoniano, la meccanica statistica classica e la meccanica quantistica.