SEMINARI DI RELATIVITA'

DA 3 CREDITI F

(Proponente: Prof. Livio Pizzocchero; a.a. 2019/20)

Per l'anno accademico 2019/20, il Consiglio di coordinamento didattico di Matematica offre agli studenti magistrali la possibilità di conseguire 3 crediti di tipo F preparando e tenendo un seminario su un argomento avanzato collegato ad un insegnamento del corso di laurea magistrale. Il docente di Relatività 1 propone i seguenti argomenti:

1) Il sistema GPS e la relatività generale.

2) Modelli cosmologici in relatività generale.

3) Introduzione ai buchi neri.

4) Le onde gravitazionali e la loro rivelazione.

Gli studenti sono invitati a segnalare il proprio interesse per uno di questi argomenti inviando (durante il primo semestre, o all'inizio del secondo) un messaggio di posta elettronica all'indirizzo livio.pizzocchero@unimi.it. Sulla base delle segnalazioni ricevute, durante il secondo semestre il docente fisserà un incontro con gli interessati per organizzare l'attività seminariale.

Nelle pagine che seguono, si descrivono brevemente gli argomenti 1) 2) 3) 4).

1. IL GPS E LA RELATIVITÀ GENERALE

Il GPS (Global Positioning System) è un sistema per la misurazione precisa della posizione di un ricevitore vicino alla superficie terrestre, resa possibile dai segnali orari inviati via radio da una rete di satelliti.

La prima parte del seminario riguarda la teoria elementare del sistema GPS. La seconda parte concerne una teoria più raffinata, che include effetti relativistici (non trascurabili dal punto di vista pratico); in particolare si considera l'influenza del campo gravitazionale terrestre sul ritmo degli orologi satellitari, calcolabile con la teoria della relatività generale.

Bibliografia

[1] Tesi di laurea sull'argomento, relatore L. Pizzocchero

[2] J.B. Lundberg, "Alternative algorithms for the GPS static positioning solution", Appl. Math. Comput., 119(1), 2134 (2001)

[3] J.B. Hartle, "Gravity: an introduction to Einstein's general relativity", Addison-Wesley

2. MODELLI COSMOLOGICI IN RELATIVITÀ GENERALE

L'universo come un tutto si può studiare utilizzando le equazioni di Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$, o le equazioni di Einstein modificate $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, dove Λ è la *costante cosmologica*. (Qui e nel seguito, si impiegano delle unità di misura in cui la velocità della luce c e la costante di gravitazione universale G valgono 1.)

Supponendo che l'universo sia spazialmente omogeneo ed isotropo, si può assumere per la metrica spaziotemporale g la forma (di Robertson-Walker)

$$g = a^2(t)\gamma^{(k)} - dt \otimes dt$$

dove t è una coordinata temporale convenientemente definita, $\gamma^{(k)}$ è una metrica riemanniana (in dimensione 3) a curvatura sezionale costante $k \in \{-1, 0, 1\}$, e $a(t) \in (0, +\infty)$ è un "fattore di scala". Se il tensore energia-impulso si suppone come quello di un fluido perfetto, dalle equazioni di Einstein si ottengono le *equazioni di Friedmann*

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = 8\pi\rho \ , \quad \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p$$

dove $\cdot := d/dt$; $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$ sono, rispettivamente, la densità di massa-energia e la pressione dovute a tutte le forme di materia e radiazione contenute nell'universo.

Queste equazioni si possono usare per descrivere il "big bang", l'espansione dell'universo, ecc., oltre che per discutere l'età dell'universo e il suo contenuto di materia. Come parte del seminario si confronteranno le previsioni teoriche basate sulle equazioni di Friedmann con i dati osservativi disponibili, discutendo i problemi che emergono da tale confronto; tra questi, c'è il famoso problema della *materia oscura*. Si segnala anche l'espressione *energia oscura*, usata spesso con riferimento al termine cosmologico $\Lambda g_{\mu\nu}$ nelle equazioni di Einstein.

Bibliografia

[1] Tesi di laurea sull'argomento, relatore L. Pizzocchero

[2] V. Benci, P. Freguglia, "Modelli e realtà. Una riflessione sulle nozioni di spazio e tempo", Bollati Boringhieri

[3] Y. Choquet-Bruhat, "General Relativity and the Einstein equations", Oxford University Press

[4] A. Das, "Lectures on gravitation", World Scientific

[5] R. d'Inverno, "Introduzione alla Relatività di Einstein", Ed. CLUEB

[6] D. Maoz, "Astrophysics in a Nutshell", Princeton University Press

[7] R.M. Wald, "General Relativity", University of Chicago Press

[8] Y. Wang, "Dark energy", Wiley-VCH

3. INTRODUZIONE AI BUCHI NERI

L'argomento si può introdurre partendo da una delle soluzioni più antiche delle equazioni di Einstein: la soluzione di Schwarzschild esterna (1916) che descrive la metrica spazio temporale g (e dunque, il campo gravitazionale) all'esterno di un corpo sferico (cfr. L.P., appunti di Relatività Generale, parte seconda).
Usando coordinate "sferiche" r, θ, ϕ insieme ad una coordinata temporale t, questa soluzione può scrivere così:

$$g = \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{R_s}{r}} + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi) - (1 - \frac{R_s}{r})(cdt) \otimes (cdt) \,,$$

$$R_s := \frac{2GM}{c^2} \,, \qquad M := \text{ massa del corpo sferico,}$$

$$(c := \text{vel. della luce} \,, \; G := \text{cost. di gravitaz. universale})$$

([1]) ([2]). La soluzione data vale per

$$r > \text{raggio del corpo sferico} \equiv R \,.$$

Apparentemente, la metrica g presenta una singolarità per

$$r = R_s, \text{ detto il } \textit{raggio di Schwarzschild} \,.$$

In molti i casi, questo non è un problema perchè

$$R > R_s$$

[1]con un linguaggio più tradizionale, si dice che l' "elemento di linea spazio-temporale" è dato da

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} + r^2 \big(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \big) - \big(1 - \frac{R_s}{r} \; \big)(cdt)^2.$$

[2]spesso, queste considerazioni si fanno usando delle unità di misura in cui $c = G = 1$; allora $R_s = 2M$.

(cosicchè $r > R$ non può assumere il valore R_s); ad esempio, se il corpo sferico è il Sole abbiamo

$$R \simeq 7 \times 10^5 \,\text{Km} \;, \qquad R_s \simeq 3\text{Km (perchè } M \simeq 2 \cdot 10^{30} \;\text{ Kg)} \;.$$

Tuttavia, è naturale chiedersi cosa si possa dire quando $0 < R < R_s$ o, al limite, quando $R = 0$. Questo ci induce a discutere la metrica

$$g = \frac{dr \otimes dr}{1 - \dfrac{R_s}{r}} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi) - (1 - \frac{R_s}{r})(cdt) \otimes (cdt)$$

$$\text{per } r > 0, \quad r \neq R_s \;.$$

Una analisi di questa metrica fa vedere che:

i) g soddisfa le equazioni di Einstein nel vuoto (cioè, con tensore energia impulso nullo) ovunque è ben definita.

ii) Per $r = R_s$ non si ha, in effetti, una singolarità della metrica ma, piuttosto, del sistema di coordinate utilizzato. In effetti, sostituendo t con un'altra coordinata si ottiene una espressione per g priva di singolarità per ogni $r > 0$, incluso $r = R_s$. ([3])

[3] In luogo di t si può usare la coordinata di Eddington-Finkelstein $v := ct + r + R_s \ln|\frac{r}{R_s} - 1|$. Allora $ct = v - r - R_s \ln|\frac{r}{R_s} - 1|$, da cui $cdt = dv - \frac{dr}{1 - \frac{R_s}{r}}$, da cui

$$g = dr \otimes dv + dv \otimes dr - \big(1 - \frac{R_s}{r}\big) dv \otimes dv + r^2\big(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi\big) \;.$$

Questa equazione descrive una metrica (pseudo-riemanniana) priva di singolarità per ogni $r \in (0, +\infty)$, compreso $r = R_s$, e per ogni $v \in (-\infty, \infty)$.

iii) La regione $\{r \leqslant R_s\}$ è una sorta di *trappola* per le particelle, e anche per i segnali luminosi. Se una particella o un segnale luminoso si trovano ad avere $r \leqslant R_s$ in un certo momento della propria storia, in tutti i momenti futuri è $r \leqslant R_s$.
(In particolare, se la particella o il segnale attraversano la (iper)superficie $\{r = R_s\}$, restano per sempre nella regione $\{r \leqslant R_s\}$).

Si usa dire che $\{r = R_s\}$ è un *orizzonte*, e si descrive la trappola di cui sopra usando l'espressione *buco nero*; l'aggettivo "nero" sottolinea il fatto che nemmeno la luce può sfuggire dalla regione $\{r \leqslant R_s\}$.

Bibliografia

[1] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, "Gravitation", Freeman and Company

[2] R. d' Inverno, Introduzione alla relatività di Einstein, CLUEB

[3] J.B. Hartle, "Gravity: an introduction to Einstein's general relativity", Addison-Wesley

[4] R.M. Wald, "General relativity", University of Chicago Press

4. LE ONDE GRAVITAZIONALI E LA LORO RIVELAZIONE

La metrica spazio temporale della relatività ristretta, qui chiamata η per motivi di comodità successiva, si descrive facilmente in un sistema coordinate inerzali $((x^i)_{i=1,2,3}, t) \equiv (x^\mu)_{\mu=1,2,3,t}$:

$$\eta = \sum_{i=1,2,3} dx^i \otimes dx^i - c^2 dt \otimes dt = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

$(\eta_{\mu\nu}) :=$ matrice diagonale con $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{tt} = -c^2$.

(Qui e nel seguito si sottointendono le somme su tutti gli indici ripetuti che figurano due volte in una formula, una volta in alto e una in basso, ad esempio gli indici μ e ν nell'espressione $\eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$; tutti gli indici greci variano in $\{1, 2, 3, t\}$).

Ora consideriamo uno spazio-tempo *quasi piatto*, con una metrica

$$g = \eta + h$$

dove η è la metrica piatta della relatività ristretta, e h una *piccola correzione* (dipendentente dall'evento). In coordinate "quasi-inerziali" $(x^\lambda) = (x^1, x^2, x^3, t)$ è $g_{\mu\nu}(x^\lambda) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\lambda)$.

Scriviamo le equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

dove $T_{\mu\nu}$ sono i coefficienti del tensore energia impulso (il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura nel primo membro sono quelli della metrica g).

Con la precedente ipotesi di quasi-piattezza (e con qualche precisazione sulla scelta delle coordinate quasi-inerziali), le equazioni di Einsten per $g = \eta + h$ danno luogo, *linearizzando rispetto ad* h, alle equazioni

$$\Box \overline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \ ,$$

dove il primo membro si definisce ponendo

$$(\eta^{\lambda\sigma}) := (\eta_{\lambda\sigma})^{-1} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1/c^2) \ ,$$

$$\Box := \eta^{\lambda\sigma}\partial_\lambda\partial_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \ ,$$

$$\overline{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\, h^\lambda{}_\lambda \ , \quad h^\lambda{}_\rho := \eta^{\lambda\sigma} h_{\sigma\rho}$$

([4]). $\Box$ è il familiare *operatore di d'Alembert, o delle onde*, che gioca un ruolo fondamentale anche in altri contesti (in particolare, nella descrizione delle onde elettromagnetiche).

In sostanza, ogni coefficiente $\overline{h}_{\mu\nu}$ soddisfa l'*equazione delle onde con termine di sorgente proporzionale a* $T_{\mu\nu}$.

In particolare, nelle regioni spazio-temporali vuote ($T_{\mu\nu} = 0$) è $\Box \overline{h}_{\mu\nu} = 0$. ([5])

---

[4]Solo per completezza, si segnala quanto segue:
i) i coefficienti $\overline{h}_{\mu\nu}$ devono anche soddisfare le "condizioni di gauge" $\partial^\mu \overline{h}_{\mu\nu} = 0$, in cui $\partial^\mu := \eta^{\mu\sigma}\partial_\sigma$. Queste condizioni si possono sempre soddisfare, scegliendo opportunamente le coordinate quasi inerziali.
ii) La definizione $\overline{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\, h^\lambda{}_\lambda$ implica $h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\, \overline{h}^\lambda{}_\lambda$, dove $\overline{h}^\lambda{}_\rho := \eta^{\lambda\sigma}\overline{h}_{\sigma\rho}$.

[5]E' facile costruire soluzioni di tali equazioni, usando la teoria generale dell'equazione delle onde. Ad esempio, le equazioni nel vuoto $\Box\overline{h}_{\mu\nu} = 0$ hanno soluzioni del tipo

$$\overline{h}_{\mu\nu} = f(x^1 \mp ct) H_{\mu\nu}$$

dove f una funzione arbitraria e $H_{\mu\nu}$ è una matrice simmetrica costante. La condizione di gauge $\partial^\mu \overline{h}_{\mu\nu} = 0$ è soddisfatta se $k^\mu H_{\mu\nu} = 0$, dove $(k^\mu)_{\mu=1,2,3,t} := (1, 0, 0, \pm 1/c)$.

Nel contesto che stiamo descrivendo, si dice che sono presenti delle *onde* (o *radiazioni*) *gravitazionali*.

Le onde gravitazionali furono predette da Einstein già nel 1916; queste increspature dello spazio-tempo sono tipicamente molto lievi, e quindi assai difficili da rivelare.

Usando degli apparati sensibilissimi ([6]), a partire dal 2002 si è cercato di rivelare le onde gravitazionali prodotte da eventi astronomici di tipo catastrofico (cioè, da sorgenti molto intense).

Il 12 febbraio 2016, le collaborazioni LIGO e Virgo hanno annunciato l'osservazione di onde gravitazionali da parte dei due rivelatori LIGO, in funzione in quel momento. Il segnale osservato è in accordo con la previsioni teoriche sulla radiazione gravitazionale prodotta dalla fusione di due buchi neri con masse pari a circa 30 masse solari, avvenuta a una distanza di circa 10^9 anni luce.

[6] questi apparati sono degli inteferometri di Michelson di grandi dimensioni, in cui dei raggi di luce laser interferiscono dopo avere viaggiato in direzioni diverse. Secondo la teoria dell'interferometro di Michelson, la figura di interferenza raccolta in un dato punto dal rivelatore dipende dalla differenza dei cammini percorsi dai raggi che qui si incontrano. L'arrivo di onde gravitazionali cambia le distanze coperte dai raggi che interferiscono, producendo uno spostamento lievissimo ma rivelabile delle frange di interferenza.

Bibliografia

[1] R.M. Wald, “General relativity”, University of Chicago Press

[2] B.F. Schutz, “A first course in general relativity”, Cambridge University Press

[3] J.B. Hartle, “Gravity: an introduction to Einstein’s general relativity”, Addison-Wesley

[4] LIGO and Virgo Scientific Collaborations, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger”, Physical Review Letters **116**, 061102 (12 february 2016).

[5] A. Giazotto, A. Brillet, “The Virgo Project” (1989).