

Meccanica Hamiltoniana

Dato un sistema meccanico con coordinate $q = \{q_1; \dots; q_n\}$, energia cinetica T ed energia potenziale U , le traiettorie $q(t); \dot{q}(t)$ sono i minimi del *funzionale di azione*

$$S = \int L(q(t); \dot{q}(t); t) dt$$

Esse sono le soluzioni delle **EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$$

Sia $L(q; \dot{q}; t)$ la Lagrangiana di un sistema. Pongo

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Definisco allora nelle variabili p e q la **FUNZIONE HAMILTONIANA**

$$H(q; p; t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q; \dot{q}; t).$$

Essa è la trasformata di Legendre della funzione Lagrangiana.

Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange alle coordinate p e q , si ottengono le **EQUAZIONI DI HAMILTON**:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

ESEMPIO

Considero il sistema meccanico unidimensionale dato da un punto materiale collegato ad una molla, che si muove su un piano orizzontale privo di attrito. L'energia cinetica è $T = (1/2) m \dot{q}^2$; l'energia potenziale è $U = -kq^2$. Allora, la Lagrangiana è

$$L(q; \dot{q}; t) = (1/2)m \dot{q}^2 + kq^2;$$

Abbiamo

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q},$$

da cui

$$H(p; q; t) = \frac{p^2}{2m} - kq^2.$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -2kq.\end{aligned}$$

DEFINIZIONE

Un cambiamento di coordinate $p'(q; p)$, $q'(q; p)$ si dice **SIMPLETTICO** se la funzione Hamiltoniana rimane invariata, cioè $H'(p'; q') = H(p; q)$.

Ciò significa che la trasformazione lascia invariata la *forma simplettica*

$$\omega = dp \wedge dq,$$

Deve essere

$$dp' \wedge dq' = dp \wedge dq.$$

Quindi,

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial p} dp + \frac{\partial p'}{\partial q} dq\right) \wedge \left(\frac{\partial q'}{\partial p} dp + \frac{\partial q'}{\partial q} dq\right) = dp \wedge dq.$$

DEFINIZIONE

Siano $F(p; q)$ e $G(p; q)$ due funzioni nello spazio delle fasi. Allora, si definiscono le **PARENTESI DI POISSON**:

$$\{F; G\}(p; q) = \left(\frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q}\right).$$

In particolare, se $F(p; q; t)$ è una funzione nello spazio delle fasi dipendente dal tempo, allora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F &= \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F; H\} + \frac{\partial F}{\partial t}.\end{aligned}$$

Se F non dipende dal tempo, allora F è una costante del moto se e solo se

$$\{F; H\} = 0.$$

La derivata di Lie

Sia v un campo vettoriale C^∞ su una varietà differenziabile M di dimensione n . $\forall m \in M$, esiste ed è unica la curva $t \mapsto \Phi^t(m)$ tale che:

$\Phi^0(m) = m$ e il vettore tangente a tale curva per $t = t'$ è $v(\Phi^{t'}(m))$, ovvero

$$\frac{d}{dt}(\Phi^t(m)) = v(\Phi^t(m)), \forall t \in I, I \subset \mathbb{R}.$$

Se M è compatta, allora, $\forall t \in I$,

$\Phi^t : M \mapsto M$ è un diffeomorfismo, con inverso Φ^{-t} . Inoltre, $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$.

La famiglia $\{\Phi^t, t \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo ad un parametro del gruppo delle trasformazioni di M , e si dice *flusso indotto su M dal campo vettoriale v* .

Sia $\Phi : M \mapsto N$ un diffeomorfismo; X un campo vettoriale su N . Il *pull-back* Φ^*X è un campo vettoriale su M definito da

$$(\Phi^*X)(m) = (D\Phi_m)^{-1}(X(\Phi(m))).$$

Siano X e Y due campi vettoriali su M , $\{\Phi^t\}$ il flusso indotto da X . La *derivata di Lie* di Y rispetto ad X in M è il campo vettoriale

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_m &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(D\Phi^{-t})(Y(\Phi^t(m))) - Y(m)}{t} = \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (\Phi^t)^* Y. \end{aligned}$$

$(\mathcal{L}_X Y)$ si dice anche *prodotto di Lie* di X e Y e si indica con $[X; Y]$.

In \mathbb{R}^n vale la formula

$$[X; Y]_m = (DY)_m(X(m)) - (DX)_m(Y(m)).$$

Essa ci permette di calcolare la derivata di Lie in coordinate locali.

Sia $\Phi : M \mapsto N$ definita come in precedenza; α una k -forma su N . Il *pull-back* $\Phi^*\alpha$ è una k -forma su M definita da

$$\begin{aligned} (\Phi^*\alpha)_m(e_1; e_2; \dots; e_k) &= \\ &= \alpha_{\Phi(m)}((D\Phi)_m e_1; \dots; (D\Phi)_m e_k) \end{aligned}$$

Sia X un campo vettoriale su M , $\{\Phi^t\}$ il flusso indotto da X . La *derivata di Lie* di β rispetto a X , $\beta \in \Omega^k(M)$, è

$$(\mathcal{L}_X\beta)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi^t)^*(\beta_{\Phi^t(m)}) - \beta_m}{t} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} (\Phi^t)^*(\beta_{\Phi^t(m)}).$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\Phi^*(\alpha \wedge \beta) &= (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta); \\ \Phi^*d\alpha &= d\Phi^*\alpha.\end{aligned}$$

Sia ω una k -forma su M , X un campo vettoriale tangente ad M . Se $k > 0$ si definisce il *prodotto interno* di ω e X come

$$\begin{aligned}(\iota(X)\omega)_m((e_1)_m; (e_2)_m; \dots; (e_{k-1})_m) &= \\ = (\omega)_m(X_m; (e_1)_m; (e_2)_m; \dots; (e_{k-1})_m).\end{aligned}$$

TEOREMA

Se ω è una k -forma e se v è un campo vettoriale su M , allora

$$(\mathcal{L}_v\omega) = d(\iota(v)\omega) + \iota(v)d\omega.$$

Spazi vettoriali simplettici

Sia W uno spazio vettoriale di dimensione reale *pari*. W si dice **spazio vettoriale simplettico** se esiste una 2-forma

$$\omega : W \times W \mapsto \mathbb{R}$$

bilineare, antisimmetrica e non degenera.

DEFINIZIONE

Sia V un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale simplettico W . Il **complemento simplettico** di V è il sottospazio

$$V^0 = \{v' \in W : \omega(v'; v) = 0, \forall v \in V\}.$$

DEFINIZIONE

Il sottospazio V si dice:

- a) **Simplettico** se $V \cap V^0 = \{0\}$;
- b) **Isotropo** se $V \subseteq V^0$;
- c) **Coisotropo** se $V^0 \subseteq V$;
- d) **Lagrangiano** se $V = V^0$.

OSSERVAZIONE

Se W è uno spazio vettoriale simplettico e V è un sottospazio vettoriale di dimensione 1, allora V è isotropo: infatti, se $V = \text{span}\{v\}$, allora,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$\omega(\lambda v; \mu v) = \lambda \mu \omega(v; v) = 0,$$

e, di conseguenza, $V \subseteq V^0$.

Analogamente si verifica che se V ha codimensione 1, allora V è coisotropo.

ESEMPIO.

$\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. \mathbb{R}^{2n} è uno spazio vettoriale simplettico, con la 2-forma canonica

$$\omega \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) = b(a') - b'(a)$$

$$\forall a, a' \in \mathbb{R}^n; \forall b, b' \in (\mathbb{R}^n)^*.$$

DEFINIZIONE

Siano $(E; \sigma)$ ed $(F; \tau)$ due spazi vettoriali simplettici. Un'applicazione lineare $A : E \rightarrow F$ si dice *isomorfismo simplettico* se A è un isomorfismo di spazi vettoriali e se $A^* \tau = \sigma$, cioè $\sigma(e_1; e_2) = \tau(Ae_1; Ae_2)$.

TEOREMA

Ogni spazio vettoriale simplettico $(E; \sigma)$ è simpletticamente isomorfo a $(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*; \omega)$, dove ω è la forma canonica, per qualche n .

Un isomorfismo $A : E \rightarrow \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ che manda la base di E

$$\{e_1; e_2; \dots; e_n; f_1; f_2; \dots; f_n\}$$

nella base standard di $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ è *simplettico* se e solo se, $\forall i, j \in \{1; 2; \dots; n\}$,

$$\begin{aligned} \sigma(e_i; e_j) &= 0; \\ \sigma(f_i; f_j) &= 0; \\ \sigma(f_i; e_j) &= \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Varietà simplettiche

DEFINIZIONE

Se M è una varietà differenziabile di dimensione $2n$, una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ si dice **STRUTTURA SIMPLETTICA SU M** se valgono le seguenti condizioni:

- 1) $\forall p \in M, \omega_p$ è non degenere;
- 2) $\forall p \in M, \omega_p$ è antisimmetrica;
- 3) ω è chiusa.

In tal caso, si dice che $(M; \omega)$ è una **VARIETA' SIMPLETTICA**.

La prima condizione implica che $\omega^n \neq 0$, e quindi M è *orientabile*.

ESEMPIO

Data la sfera S^2 in \mathbb{R}^3 , $\forall p \in S^2, T_p S^2 = p^\perp$.

Considero la 2-forma su S^2 data in p da $\omega_p(v; w) = \langle v \wedge w; p \rangle, \forall v; w \in T_p S^2$.

ω è non degenere ed antisimmetrica; inoltre, essa è chiusa perchè in una varietà di dimensione 2 non e-

sistono 3-forme non nulle; dunque ω è una struttura simplettica su S^2 .

ESEMPIO

Ogni *varietà di Kahler* è una varietà simplettica, in quanto la forma di Kahler è una (1;1)-forma non degenere e chiusa.

Il fibrato cotangente

Considero il fibrato $\pi : T^*X \rightarrow X$. $\forall x \in X$, la fibra in x è il duale dello spazio tangente ad X in x .

Il differenziale $(D\pi)$ manda un vettore tangente in $(x; \xi)$ a T^*X in un vettore tangente ad X in x . ξ è un elemento di T_x^*X .

DEFINIZIONE

La *1-forma canonica* su T^*X è

$$\alpha_{(x; \xi)} = \xi \circ D\pi.$$

DEFINIZIONE

La 2-forma $\sigma = d\alpha$ si dice *2-forma canonica su T^*X* .

Si verifica che T^*X con la 2-forma canonica è una varietà simplettica, detta *spazio delle fasi di X* .

TEOREMA

Se $\lambda \in \Omega^1(X)$ è una sezione di T^*X , allora

$$\lambda = \lambda^*\alpha$$

$$\begin{aligned} -)(\lambda^*\alpha)_x &= \alpha_{(x;\lambda_x)} \circ D\lambda_x = \lambda_x \circ D\pi_{(x;\lambda_x)} \circ D\lambda_x = \\ &= \lambda_x \circ D(\pi_{(x;\lambda_x)} \circ \lambda_x) = \lambda_x. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

Le varietà simplettiche sono una notevole generalizzazione delle varietà di Kahler. Infatti si dimostra che per ogni gruppo G finitamente generato esiste una varietà simplettica compatta di dimensione 4 il cui gruppo fondamentale è proprio G .

Questo non è vero per le varietà di Kahler: basta prendere, per esempio, $G = \mathbb{Z}$.

DEFINIZIONE

Sia $(M; \omega)$ una varietà simplettica. Una sottovarietà N di M si dice **LAGRANGIANA** se $\forall q \in N, T_q N$ è un sottospazio vettoriale Lagrangiano di $T_q M$.

DEFINIZIONE

Sia $(M; \omega)$ una varietà simplettica. Poichè ω è non degenera, esiste un isomorfismo tra TM e T^*M che ad un campo vettoriale $X \in TM$ associa la 1-forma $\iota(X)\omega = \omega(X; \cdot)$. Esso coincide proprio con il prodotto interno.

DEFINIZIONE

Un **SIMPLETTOMORFISMO** è un'applicazione differenziabile $\psi : M \rightarrow M$ tale che $\psi^*\omega = \omega$, dove ω è la struttura simplettica su M . Il gruppo dei simplettomorfismi di $(M; \omega)$ si indica con $Symp(M; \omega)$.

DEFINIZIONE

Un campo vettoriale $X \in TM$ si dice **SIMPLETTICO** se la 1-forma $\iota(X)\omega$ è chiusa. Lo spazio dei campi vettoriali simplettici si indica con $\chi(M; \omega)$.

TEOREMA IMPORTANTE

Sia $(M; \omega)$ una varietà simplettica compatta. Se $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è una famiglia differenziabile di diffeomorfismi di M in sè stesso generata da un campo vettoriale X che soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned}\psi_0 &= Id; \\ \left(\frac{d}{dt}\right)\psi_t &= X_t \circ \psi_t,\end{aligned}$$

allora $\psi_t \in \text{Symp}(M; \omega)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se e solo se $X_t \in \chi(M; \omega)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

DIM. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\{\psi_t\}$ è il flusso indotto da X_t . Allora, valgono le formule

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_t}\omega &= \iota(X_t)d\omega + d(\iota(X_t)\omega) \\ &\text{e} \\ \left(\frac{d}{dt}\right)\psi_t^*\omega &= \psi_t^*(\iota(X_t)d\omega + d(\iota(X_t)\omega)) = \\ &= \psi_t^*d(\iota(X_t)\omega).\end{aligned}$$

Essendo $\psi_0^*\omega = \omega$, $\psi_t^*\omega$ vale costantemente ω se e solo se $\left(\frac{d}{dt}\right)\psi_t^*\omega = 0$, cioè $d(\iota(X_t)\omega) = 0$, $\forall t$.

TEOREMA

Se X e Y sono campi vettoriali simplettici, allora $[X; Y] \in \chi(M; \omega)$ e

$$\iota([X; Y])\omega = dH,$$

dove H è definita da $H(p) = \omega_p(X_p; Y_p)$.

OSSERVAZIONE

Dai due teoremi precedenti, segue immediatamente che $\chi(M; \omega)$ è l'algebra di Lie associata al gruppo di Lie $\text{Symp}(M; \omega)$, nel caso in cui M sia compatta.

Flussi Hamiltoniani.

DEFINIZIONE

Per ogni funzione differenziabile $H : M \mapsto \mathbb{R}$, il campo vettoriale $X_H : M \mapsto TM$ determinato dalla condizione

$$\iota(X_H)\omega = dH,$$

si dice **CAMPO VETTORIALE HAMILTONIANO** associato alla **FUNZIONE HAMILTONIANA** H .

Il flusso indotto da tale campo vettoriale si dice **FLUSSO HAMILTONIANO** associato ad H

Viceversa, ogni campo vettoriale simplettico è, localmente, il campo vettoriale Hamiltoniano di qualche funzione H , detta **FUNZIONE HAMILTONIANA**.

DEFINIZIONE

Una **TRASFORMAZIONE CANONICA COORDINATA** di $(M; \omega)$ è un simplettomorfismo

$$\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$$

che è anche un diffeomorfismo locale.

DEFINIZIONE

Si definiscono le **PARENTESI DI POISSON** di due funzioni $F; G \in C^\infty(M)$ come

$$\{F; G\} = X_F G = \omega(X_F; X_G);$$

Si verifica che queste parentesi di Poisson danno origine a una struttura di algebra di Lie sullo spazio $C^\infty(M)$.

OSSERVAZIONE

Su $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ con la base $\{x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n\}$ le parentesi di Poisson assumono la forma

$$\{F; G\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial \xi_j} \right)$$

TEOREMA

La funzioni $x_1; \dots; x_n; \xi_1; \dots; \xi_n$ danno origine ad una trasformazione canonica coordinata su $(M; \omega)$ se e solo se:

$$\begin{aligned} \{x_i; x_j\} &= 0; \\ \{\xi_i; \xi_j\} &= 0; \\ \{\xi_i; x_j\} &= \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

TEOREMA

Sia $(M; \omega)$ una varietà simplettica; allora:

1) per ogni t , il flusso Hamiltoniano ϕ_H^t è un simplettomorfismo la cui derivata rispetto a t è un campo vettoriale tangente alle curve di livello di H .

2) Per ogni funzione Hamiltoniana H e $\forall \psi \in \text{Symplect}(M; \omega)$, si ha

$$X_{H \circ \psi} = \psi^* X_H;$$

3) $[X_H; X_G] = X_{\{F; G\}}$.

TEOREMA DI DARBOUX

Sia $(M; \omega)$ una varietà simplettica di dimensione $2n$. Allora, $\forall m \in M$ $\exists U$ intorno di m tale che

$$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$$

sia una trasformazione canonica coordinata.

DEFINIZIONE

Sia $(M; \omega)$ una varietà simplettica. Una sottovarietà N di M si dice **COISOTROPA** oppure **INVOLUTIVA** se $\forall q \in N$, $T_q N$ è un sottospazio vettoriale coisotropo di $T_q M$.

TEOREMA

Sia $(M; \omega)$ una varietà simplettica e sia V una sottovarietà definita su un aperto U dall'annullamento di funzioni C^∞ $f_1; f_2; \dots; f_k$ tali che i differenziali $\{df_1; df_2; \dots; df_k\}$ siano linearmente indipendenti. Allora, V è *coisotropa* in U se e solo se

$$\{f_i; f_j\} = 0 \text{ su } V \cap U, \forall i, j \in \{1; 2; \dots; k\}.$$

DIM. $T_m V = \bigcap_{i=1}^n \ker(df_i)_m = \bigcap_{i=1}^n [X_{f_i}(m)]^0$. La seconda uguaglianza segue dal fatto che

$$df_i = \iota(X_{f_i})\omega = \omega(X_{f_i}; \cdot). \text{ Poichè, in generale,}$$

$$V^0 \cap W^0 = (V + W)^0,$$

$$T_m V = (\text{span}\{X_{f_i}\})^0 \text{ e } (T_m V)^0 = \text{span}\{X_{f_i}\}.$$

Poichè

$$df_i(X_{f_j}) = (\iota(X_{f_i})\omega)(X_{f_j}) = \omega(X_{f_i}; X_{f_j}) = \{f_i; f_j\},$$

ne segue che $X_{f_i} \in T_m V$, cioè V è coisotropa, se e solo se $\{f_i; f_j\} = 0$, $\forall i, j$.