CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Prof. Bernhard Ruf

I metodi variazionali hanno una lunga tradizione nella storia della Matematica. I Greci hanno studiato problemi isoperimetrici per precisare "le forme ottimali". In 1662 Fermat ha postulato che la luce segue il tratto di minimo tempo, e ha dedotto da questo principio la legge di rifrazione. In 1744 Eulero dice addirittura che "ogni effetto in natura segue un principio di massimo o minimo". Anche se questa affermazione forse è esagerata, senz'altro vero che il calcolo delle variazioni fornisce uno strumento molto forte per studiare tanti problemi della matematica, della fisica e delle scienze applicate. Tra le applicazioni pi importanti di questi metodi sono: esistenza di geodetiche, di superifici di area minima, di soluzioni periodiche per sistemi di N corpi; esistenza di soluzioni per equazioni alle derivate parziali nonlineari di tipo ellittico.

Programma

1. Il metodo diretto del calcolo delle variazioni
   - richiami su spazi funzionali, derivate di mappe nonlineari
   - funzionali semi-continui inferiormente
   - l'equazione di Eulero
2. Il quadro funzionale per equazioni differenziali
   - spazi di Sobolev
   - soluzioni deboli, cenni a alcuni teoremi di regolarità
3. Teoremi di Minimax per funzionali indefiniti
   - la proprietà di Palais-Smale
   - il teorema del "mountain-pass" (Ambrosetti-Rabinowitz)
   - teoremi di "linking" (Benci-Rabinowitz)
4. Applicazioni
   - esistenza di soluzioni per equazioni nonlineari alle derivate parziali
   - esistenza di soluzioni multiple e biforcazione di soluzioni
   - esistenza di orbite periodiche di sistemi Hamiltoniani
5. Problemi con simmetrie e teorie del indice
   - teorema di Borsuk-Ulam
   - teorie dell'indice per problemi con simmetrie
   - teoria di Lusternik-Schnirelman

6. Problemi ”senza compattezza”
   - la crescita critica (negli spazi di Sobolev)
   - il lavoro di Brezis-Nirenberg
   - il teorema di concentrazione-compattezza di P.L. Lions

7. Applicazioni
   - equazioni ellittiche con nonlinearità con crescita critica
   - equazioni ellittiche non lineari in R^n
   - equazioni di Schrödinger non lineari

Testi consigliati

A. Ambrosetti, A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 2007

M. Struwe, *Variational Methods: Applications to Nonlinear PDE and Hamiltonian Systems*, Springer, Berlin, 1990.

O. Kavian, *Introductions à la thèorie des points critiques*, Springer, Paris, 1991

J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory & Hamiltonian Systems*, Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 1980

M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Appl., Birkhäuser, Boston, 1996