Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Salvatori)
Prima prova in itinere 19 novembre 2015
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

1. **(PUNTI 5)** Siano

$$a_n = \log(4^n + 2e) - \log(4^n + 2), \quad b_n = \sqrt{n^4 + n} - n^2.$$

Determinare

$$\lim_{n\to+\infty} a_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n}$$

2. **(PUNTI 5)** Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2,\ \operatorname{Im}(iz^2) < 0,\ \operatorname{Re}((\sqrt{3}+i)z) \geq 0 \right\};B = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = z^2, z \in A \right\}$$

3. **(PUNTI 4)** Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ rappresentare graficamente la funzione $g(x) = |\arctan(|x|) + \alpha|$. Determinare poi $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$, precisando se è massimo.

4. **(PUNTI 4)** Stabilire se i seguenti insiemi sono compatti in $\mathbb{R}^2$ giustificando brevemente la risposta

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(n+1, 0),\ n \in \mathbb{N}\}$..

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(1+1/n, 0),\ n \in \mathbb{N}\}$..

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{((1+1/n)^n, 0),\ n \in \mathbb{N}\}$..

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \cup \{(3, 0); (4, 0); (5, 0)\}$..

5. **(PUNTI 5)** Determinare, in forma trigonometrica, tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^4 i + 5 + 4z\bar{z} = 0.$$

6. **(PUNTI 5)** Al variare di $x \in \mathbb{R}_+$ studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{[\log x]}{2} \right)^n$$

e calcolarne la somma, quando possibile.
Si ricorda che $[t]$ denota la parte intera di t.

7. **(PUNTI 4)** Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - \arctan(2n)}{\sqrt{n}\cos^2 n + n\sqrt{n}\log^2 n + 4^{-n}}$$