corso di laurea in Matematica (F7X)

ANALISI MATEMATICA 2

11/09/2012 prof. M.Vignati vers. a

Durata: **120 minuti**. Di tutti gli esercizi svolti va motivata la risposta.

1a] (3+2=5 punti)

i) Discutere la natura dei punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := 4x^2 + 4xy + y^2 + \sin(x - 2y) \ .$$

ii) Determinare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$.

2a] (4 p.ti) Calcolare $\dfrac{\partial h_1}{\partial z}(1, -1, 4)$, sapendo che $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = \mathbf{g} \circ f$, dove

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R} \ , \quad f(x, y, z) = x^2 y - y^2\sqrt{z} + xz$$

e dove

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \mathbf{g} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right) , \quad \mathbf{g}'(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

3a] (5 p.ti) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a : (0, 2) \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_a(x) := \begin{cases} \dfrac{\log x}{\sin(\pi x)} & \text{se } x \in (0,1) \cup (1,2) \\ a & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

è derivabile in tutti i punti dell'intervallo $(0, 2)$.

4a] (6+2+3=11 p.ti) È data la funzione reale di variabile reale

$$F(x) := \int_1^{\log(x+1)} f(t)\, dt \ , \quad \text{dove } f(t) = \frac{\log t}{\sin(\pi t)} \text{ per } t > 0, \ t \notin \mathbb{N}.$$

i) Determinarne: il dominio e i limiti agli estremi; il segno; gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremanti relativi. Tracciarne un grafico qualitativo.

ii) La retta tangente al grafico di F nel punto di ordinata nulla interseca l'asse y in $(0, y_0)$. Calcolare y_0.

iii) Verificare che l'integrale improprio $\int_0^{e-1} F(x)\, dx$ converge.

(**Sugger.:** può essere utile scrivere l'integrale come integrale (improprio) doppio della funzione $g(x, t) = |f(t)|$, esteso ad un'opportuna regione del piano (x, t) .)

5a] (5 p.ti) Calcolare $\int_E f$, dove $f(x, y, z) = |3x - y|$, e

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x \le 2, \ 0 \le y < 3, \ 0 \le z \le 2 - x\right\} .$$

corso di laurea in Matematica (F7X)

ANALISI MATEMATICA 2

11/09/2012 prof. M.Vignati vers. b

Durata: **120 minuti**. Di tutti gli esercizi svolti va motivata la risposta.

1b] (3+2=5 punti)
i) Discutere la natura dei punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := 4x^2 - 4xy + y^2 - \cos(x+2y) \ .$$

ii) Determinare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$.

2b] (4 p.ti) Calcolare $\frac{\partial h_2}{\partial z}(1,-1,4)$, sapendo che $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = \mathbf{g} \circ f$, dove

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R} \ , \quad f(x,y,z) = x^2 y - y^2 \sqrt{z} + xz$$

e dove

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \mathbf{g} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right) , \quad \mathbf{g}'(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

3b] (5 p.ti) Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a : (0,2) \to \mathbb{R}$ definita come

$$f_a(x) := \begin{cases} \dfrac{\log x}{\sin(\pi x)} & \text{se } x \in (0,1) \cup (1,2) \\ \\ a & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

è derivabile in tutti i punti dell'intervallo $(0,2)$.

4b] (6+2+3=11 p.ti) È data la funzione reale di variabile reale

$$F(x) := \int_1^{\log(x+1)} f(t)\, dt \ , \quad \text{dove } f(t) = \frac{\log t}{\sin(\pi t)} \text{ per } t > 0, \ t \notin \mathbb{N}.$$

i) Determinarne: il dominio e i limiti agli estremi; il segno; gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremanti relativi. Tracciarne un grafico qualitativo.

ii) La retta tangente al grafico di F nel punto di ordinata nulla interseca l'asse y in $(0, y_0)$. Calcolare y_0.

iii) Verificare che l'integrale improprio $\int_0^{e-1} F(x)\, dx$ converge.
(**Sugger.:** può essere utile scrivere l'integrale come integrale (improprio) doppio della funzione $g(x,t) = |f(t)|$, esteso ad un'opportuna regione del piano (x,t) .)

5b] (5 p.ti) Calcolare $\int_E f$, dove $f(x,y,z) = |x - 3y|$, e

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x \leq 3, \ 0 \leq y < 2, \ 0 \leq z \leq 2 - y\right\} .$$