Cognome **Nome** **Matricola**

Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica
(Proff. C. Cavaterra, M. Peloso)
Prima prova in itinere 17 novembre 2014 – Versione A
(Scrivere uno svolgimento sintetico ma completo)

1. **(PUNTI 4)** Sia $f(x) = \sqrt{|x+1|} - 1$ e sia $A = \{x \in \mathbb{R} : [f(x)] = 2\}$.

   i) Disegnare il grafico di $f(x)$.

   ii) Determinare A.

   iii) Determinare $\sup A, \inf A$.

   Si ricorda che $[t]$ denota la parte intera di t.

---

2. **(PUNTI 4)** Calcolare al variare del parametro reale α il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n \, \frac{3^n \log(n^2+1) + 2^n n}{\cos(n!) + 5^n n}.$$

3. **(PUNTI 4)** Siano date le successioni

$$a_n = \frac{2}{n^2} + \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{e} \qquad b_n = n^{\frac{5}{2}}\ \sin\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right).$$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n}.$$

---

4. **(PUNTI 4)** Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$\left(z^2+4\right)^3 = \left(\sqrt{3}+i\right)^6.$$

5. **(PUNTI 4)** **i)** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{n}\right\} \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Determinare

(a) A° = ...

(b) A′ = ...

(c) i punti isolati di A...

(d) ∂A = ...

ii) Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ e $0 < q \leq 1$ siano

$$B_q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = q\right\} \qquad \text{e} \qquad B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q},\ 0<q\leq 1} B_q.$$

Determinare

(a) B° = ...

(b) B′ = ...

(c) i punti isolati di B...

(d) ∂B = ...

---

6. **(PUNTI 4)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log \alpha - \frac{1}{2}\right)^n, \quad \alpha > 0.$$

(a) Determinare i valori del parametro reale positivo α per i quali la serie è convergente...

(b) Per tali valori determinare la somma della serie $S =$ ....

7. **(PUNTI 4)** Determinare al variare del parametro reale α il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n^{3\alpha})}{n^{\alpha}\log(1+n^{\alpha})}.$$

---

8. **(PUNTI 4)** Disegnare nel piano complesso gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Im}\left(\frac{iz}{\bar{z}}\right) > 0, |z| \leq 2 \right\},$$

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} : w^2 = z,\ z \in A \right\}, \quad C = \left\{ u \in \mathbb{C} : u = z^2,\ z \in A \right\}.$$