

Cognome

Nome

Matricola

**Analisi Matematica 1 - Corso di Laurea in Matematica**  
**(Proff. M. Calanchi, C. Cavaterra, F. Messina, E. Terraneo)**  
**prova scritta 5 maggio 2014 - 9 CREDITI**  
**Versione A**

1. **(PUNTI 5)** Calcolare, al variare del parametro reale  $\alpha$ , il valore di

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\{\log(2x^2 + 2x + 1) - x - \sin x\}}{\arctan(x^\alpha) + x^4}$$

*(scrivere uno svolgimento completo)*

- 
2. **(PUNTI 4)** Si considerino in  $\mathbb{R}^2$  dotato della metrica euclidea i seguenti sottoinsiemi  
 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2, y \in \mathbb{Q}\}$ ,  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3 + \frac{1}{n}, y = 2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$   
e sia  $C = E \cup F$ .

Determinare:

- (a)  $C^o = \dots\dots\dots$
- (b)  $C' = \dots\dots\dots$
- (c)  $\bar{C} = \dots\dots\dots$
- (d)  $\partial C = \dots\dots\dots$

3. (PUNTI 8) Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = |x| + 4 \arctan \frac{1}{1 + e^x}$$

Determinare

- (a) l'insieme di definizione  $A$  .....
- (b) i limiti agli estremi dell'insieme di definizione  $A$  .....
- .....
- (c) eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui)  
.....
- (d)  $f'$  e il suo insieme di definizione  $A'$   
.....  
.....
- (e) i limiti di  $f'$  agli estremi di  $A'$   
.....  
.....
- (f) eventuali punti estremanti  
.....
- (g)  $f''$  ed eventuali punti di flesso  
.....
- (h) tracciarne un grafico qualitativo

4. **(PUNTI 5)** Sia  $a_n$  una successione tale che per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Stabilire (al variare del parametro  $\alpha$ , il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{|\alpha|-3} \left[ e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \log(1 + a_n) \right]$$

*(scrivere solo la risposta)*

.....

- 
5. **(PUNTI 5)** Sia

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) (\log x)^{-1} & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ a & x = 1 \end{cases}$$

Determinare  $a$  in modo che  $f$  sia continua in  $x = 1$ . Stabilire se  $f$  è derivabile in  $x = 1$  e in caso affermativo calcolare  $f'(1)$ .

*(scrivere uno svolgimento completo)*

6. (PUNTI 5) Rappresentare graficamente i seguenti insiemi:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im}(z^3) > 0\}$$

e

$$B = \{w \in \mathbb{C} : w = \frac{i}{z}, z \in A\}.$$

---

Questo esercizio verrà valutato *solo* se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(BONUS) Studiare al variare di  $\alpha$  il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\arctan(n+1)^\alpha - \arctan n^\alpha)$$

AIUTO: Per i valori di  $\alpha$  per i quali la serie converge, calcolare la somma della serie.